EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 50 2010

ARTYKUŁY I ROZPRAWY

JAROSŁAW MROZEK
Uniwersytet Gdański

NIEBYT W MATEMATYCE?
ROLA ZERA I ZBIORU PUSTEGO W ROZWOJU MATEMATYKI

Wacław Sierpiński, wielki polski matematyk, pewnego razu zaniepokoił się, że zgubił jedną sztukę bagażu. „Nie kochanie - powiedziała mu żona - wszystkie sześć sztuk jest tutaj". „Niemożliwe - odrzekł Sierpiński - liczyłem je kilka razy: zero, jeden, dwa, trzy, cztery, pięć"[1].

Sierpiński - z anegdoty - liczył przedmioty zaczynając od zera. Taka metoda wydaje się dziwna z punktu widzenia zdrowego rozsądku. Na co dzień w konwencjonalnych zastosowaniach liczb nie potrzebujemy używać zera. Nikt nie idzie na targ kupić zero sztuk ryb. Zero dla rozumu potocznego jest czymś odmiennym od tego, co rozumiemy pod pojęciem liczby. Liczby naturalne 1, 2, 3, ... w pewnym sensie wyrażają istnienie czegoś, określonej grupy przedmiotów lub kolejność ich występowania, gdy bierzemy pod uwagę aspekt porządkowy liczby. Zero - w myśleniu potocznym - jest traktowane jako odpowiednik pojęcia „nic", dlatego też wydaje się jakościowo odmienne od pozostałych liczb. Ale z punktu widzenia spójności systemu liczenia metoda liczenia od zera jest i prostsza, i wygodniejsza, i bardziej konsekwentna. Jedną z zalet takiego sposobu liczenia jest to, że działa on nawet wtedy, kiedy nie ma żadnych przedmiotów do policzenia. Gdyby Sierpiński zgubił w drodze cały swój bagaż, mógłby powiedzieć, że zostało mu ZERO sztuk bagażu.

Jeśli prześledzimy początki - w starożytnych kulturach - wszelkiego rodzaju praktyki tworzenia pojęcia liczby, nie spotkamy ani jednego przykładu czegoś, co można by nazwać abstrakcyjnym pojęciem liczby. Wydaje się, że wszelkie procedury liczenia wywodzą się z czynności zliczania określonych zespołów przedmiotów. Świadczy o tym istnienie przypadków, w których dla opisania tych samych ilości róż-

[1] Por. J. H. Conway, R. K. *Guy: Księga liczb,* tłum. zang. W. Bartol. Warszawa 1999, s. 261.

istnienie przypadków, w których dla opisania tych samych ilości różnych rzeczy używa się różnych słów. Pewnie dlatego pierwsze systemy liczenia nie zawierały zera. A samo pojęcie zera jako liczby pojawiło się stosunkowo późno. Alfred North Whitehead uważał, że zero jest w pewnym sensie najbardziej «ucywilizowaną» z liczb, gdyż do jego użycia zostaliśmy zmuszeni dopiero w wyniku uprawiania bardziej abstrakcyjnych sposobów rozumowania niż proste zliczanie przedmiotów.

Grecy i Rzymianie unikali zera. Jedną z przyczyn tej sytuacji była specyfika greckiego podejścia do liczb. W greckiej matematyce nie występowało wyraźne oddzielenie liczb od figur geometrycznych. Mówiono przykładowo o liczbach kwadratowych czy trójkątnych. Pojęcie wielkości łączyło idee arytmetyczne i geometryczne. Grecka skłonność do geometrycznego ujmowania liczb uniemożliwiała potraktowania zera jako liczby. Jaką figurą geometryczną miałoby być takie zero? Poza tym działania na liczbach Grecy traktowali geometrycznie. Przykładowo, mnożenie dwóch liczb było dla nich równoważne wyznaczeniu pola powierzchni prostokąta o bokach równych tym liczbom. Konstrukcje geometryczne i figury były tym samym, a zero byłoby liczbą nieposiadającą żadnego sensu geometrycznego. W tym kontekście operacje, które miałyby być wykonywane przy udziale zera, wydawały się sprzeczne z naturą. Przykładowo wyznaczenie proporcji zawierającej zero prowadziło w przekonaniu Greków do paradoksalnych wniosków. Stosunek zera do jakiejkolwiek wielkości - zero podzielone przez dowolną liczbę - zawsze wynosi zero. Jak gdyby druga liczba zostawała pochłonięta przez zero. Natomiast operacja dzielenia dowolnej liczby przez zero stawiała pod znakiem zapytania same zasady logiki. Zero tworzyło wyrwę w porządku matematycznym Greków i z tego powodu nie było tolerowane.

Obawa Greków przed zerem miała też głębsze podłoże. Zero kojarzyło się im z nicością, pustką. Arystoteles w swym dziele *Fizyka* napisał: „Istnienie osobnej próżni jest niemożliwe”. Filozof przeciwstawił się tym samym tezom atomistów, którzy utrzymywali, że istnienie niepodzielnych najmniejszych ciał - atomów zakłada istnienie próżni. Arystotelesowska teza o nieistnieniu próżni była, jak się wydaje, konsekwencją jego teorii ruchu w połączeniu z metafizyczną zasadą niemożności istnienia nieskończoności aktualnej. Po upowszechnieniu się Arystotelesowsko-Ptolemejskiej wizji świata przyjęto jako pewnik, że nicość nie istnieje. W średniowieczu pogląd Arystotelesa podniesiono do rangi dogmatu jako zasadę *horror vacui* (natura boi się próżni). Z tego powodu Zachód nie akceptował koncepcji zera przez prawie dwa tysiąclecia. Brak zera hamował rozwój matematyki i postęp nauki.

Zero narodziło się z potrzeby zapisania w sposób jednoznaczny i trwały pozycji cyfr w bablionskim systemie reprezentacji liczb. W celu uniknięcia niejednoznaczności zapisu liczbowego Bablilończycy stosowali zwyczaj zostawiania wolnych miejsc w zapisie liczbowym. Przykładowo zapis „«” mógł oznaczać zarówno 20 (20 x 1) jak i 601 (10 x 60 + 10 x 1), dlatego liczbę 601 zapisywano „<_ <” zostawiając miejsce między znakami oznaczającymi 10. Notacja ta stwarzała jednak okazje do pomyłek. Niejasność w systemie babilońskim pojawiała się dlatego, że nie było w nim odrębnego znaku dla (jak dzisiaj powiedzielibyśmy) zera. W końcu zostawianie wolnych miejsc zarzucono i wprowadzono znak pustego miejsca. Pomysł zostawiania wolnych miejsc, aby uzyskać jednoznaczność wyrażeń liczbowych pojawił się ok. XX-XVIII w p.n.e., ale symbol pustego miejsca pojawił się dopiero ok. II-III w p.n.e. Z czasem „zero babilońskie” zaczęto stawiać zarówno w środku jak i na końcu ciągu liczb (a także na początku, dla wyrażania ułamków). W ciągu cyfr miało ono znaczenie jedynie w kontekście innych cyfr. Samo zero nic nie oznaczało - było cyfrą, ale nie oznaczało liczby.

Podkreślmy, że dla Babilończyków symbol zera nie miał tych wszystkich znaczeń, jakie dziś mu przypisujemy. Symbol ten miał znaczenie jedynie techniczne jako pusta pozycja w pewnym określonym przedstawieniu rzeczy. Zera również nie traktowano jako symbolu „niczego” w ogólniejszym czy abstrakcyjnym sensie. Babilończycy nie używali zera do wyrażenia wyniku odejmowania typu: a - a. Wynikiem tego działania było „nic”, czyli zupełnie inne pojęcie. Z pewnością to pojęcie nie było uważane za liczbę - zero nie było traktowane tak samo jak inne liczby. Wydawało się nawet, że w samej myśli, iż potrzebne jest „coś", aby wyrazić nieobecność czegokolwiek („nic”) kryje się jakaś sprzeczność. Poza tym „liczba zero” posiadałaby odmienne od wszystkich innych liczb własności, np. przez zero nie można dzielić.

Nowoczesna koncepcja zera zarysowała się ok. VI w n.e. w kulturze indyjskiej. Samo pojęcie zera znane było Hindusom znacznie wcześniej. Co więcej, inaczej niż w innych kulturach, Hindusi od samego początku zero kojarzyli z ideą „niczego", która miała sens abstrakcyjny. Zero oznaczało dosłownie „pusty" i stosowane było oznaczenia zarówno pustego miejsca w rzędzie układu cyfr, jak i wyniku operacji typu a - a. W odróżnieniu od Greków, Hindusi nie dostrzegali kwadratów w liczbach kwadratowych i nie utożsamiali mnożenia dwu liczb z polem prostokąta. Liczby były uwolnione od kontekstu geometrycznego, co pozwoliło matematykom indyjskim przezwyciężyć ograniczenia greckiego sposobu myślenia i nieufność do zera. Gdy liczby zostały ostatecznie pozbawione znaczenia geometrycznego, matematycy nie musieli się kłopotać, czy operacja arytmetyczna ma sens geometryczny. Nie można zmniejszyć dwuhektarowego pola o trzy hektary, ale nic nie stoi na przeszkodzie odjąć liczbę 3 od liczby 2. Wynik jest liczbą ujemną, ale to nie było problemem dla matematyków hinduskich, którzy pierwsi uznawali takie liczby za pełnoprawne obiekty arytmetyki liczbowej.

Skoro wynik odejmowania 2 - 3 był uznawany za liczbę, liczbą musiał być również wynik odejmowania 2-2. Wynik ten wynosi zero. Nie zero oznaczające pozycję cyfry, lecz liczba zero, posiadająca swoje miejsce w systemie liczb, podobnie jak wszystkie inne liczby. System liczbowy bez zera musiał być uznany za równie ułomny jak system liczbowy bez powiedzmy liczby 2. Zero ostatecznie weszło do matematyki na równych prawach.

Indyjski system liczbowy był olbrzymim osiągnięciem intelektualnym i został przyswojony nieomal wszędzie. System ten: po pierwsze, miał specjalne symbole dla liczb od 1 do 9; po drugie, symbole te były abstrakcyjne i nie wymagały przekazywania obrazowej informacji o ich znaczeniu; po trzecie, był systemem pozycyjnym o podstawie 10 i wreszcie - po czwarte, zawierał pojęcie zera we współczesnym znaczeniu.

W VII w n.e. kultura Zachodu nie zaczęła się jeszcze rozwijać po upadku Rzymu, ale na Wschodzie zaczęła rozkwitać cywilizacja Islamu. Islam przejął koncepcję zera z Indii (Al-Chwarizmi w IX w napisał książkę o hinduskim systemie liczenia), a więc zero jako liczba nabrało znaczenia najpierw na Wschodzie. Zachód z czasem przejął ją od Islamu.

Chociaż w połowie XII wieku dzieła Al-Chwarizmiego pojawiły się w Europie, początkowo odrzucano koncepcje zera, gdyż zaakceptowanie zera sugerowało możliwość uznania istnienia próżni. W Kościele niepodzielnie panowała doktryna Arystotelesa, a najwięksi ówcześni myśliciele odrzucali pojęcia: wielkości aktualnie nieskończonych, nieskończenie małych i próżni. Dopiero w XIV wieku cyfry arabskie (z zerem) zaczęły być powszechnie używane - początkowo w księgach rachunkowych.

Współcześnie obiektem zainteresowania w badaniach arytmetycznych są nie same liczby, lecz operacje, za pomocą których dokonujemy działań na liczbach. Tak więc, przykładowo, współcześnie proces wyliczania: 1, 2, 3, ... jest traktowany niejako lista konkretnych liczb (jakby się wydawało zdrowemu rozsądkowi), lecz jako rezultat wykonania określonej operacji (tworzenia następnika), polegającej na generowaniu kolejnej liczby. W takim podejściu istotna rola przypadła zeru. Mimo, że pojęcie zera stosunkowo późno zyskało sobie prawo obywatelstwa w świecie liczb, to możemy pokazać, jak przy pomocy zera „uzyskać” wszystkie liczby naturalne. Wykorzystując trzy (niezdefiniowane) pojęcia: liczba, zero (0), i bezpośredni następnik (s), możemy skonstruować wszystkie liczby naturalne. Odwołujemy się oczywiście do aksjomatyki arytmetyki podanej przez G. Peano (1889):

Al. 0 jest liczbą

Og N

A2. bezpośredni następnik liczby jest liczbą

n g N -> sn g N

A3. 0 nie jest bezpośrednim następnikiem żadnej liczby

n g N —> sn 0

A4. Żadne dwie liczby nie posiadają tego samego następnika

(n, m g N a sn = sm) —» n = m

A5. Jeśli jakaś własność - W - przysługuje liczbie 0 i z tego, że przysługuje jakiejś liczbie wynika, że przysługuje jej bezpośredniemu następnikowi, to własność ta przysługuje każdej liczbie

$$(W(0)\ A\ \{V_{nsN}[W(n) -> W(sn)]\}) -> V_{rie\ N}W(n)$$

Aby uzmysłowić sobie, że mamy do czynienia z konstrukcją czegoś, co można utożsamiać ze znanymi nam liczbami naturalnymi, przyjmijmy następujące skróty:

sO- 1
s1= ssO - 2
s2 = sssO - 3 itd.

Można zdefiniować dwa podstawowe działania na liczbach naturalnych wykorzystując tylko pojęcia zera i bezpośredniego następnika (n, m g N)

Dodawanie:
(1) n + 0 = n
(2) n + sm = s(n + m)
Mnożenie:
(1) nx0 = 0
(2) n x sm = n X m + n

Inny sposób „otrzymania” liczb naturalnych przy wykorzystaniu jedynie zera (0) i abstrakcyjnej operacji: „*” zaproponował polski logik i matematyk Leon Chwistek[2]. Chwistek był przeciwny opieraniu arytmetyki na pojęciu liczby naturalnej. Niedookreślony metafizycznie status liczby naturalnej utrudniał - według niego - budowę racjonalnych podstaw arytmetyki. Chciał stworzyć system matematyki opartej na jasnych, prostych i zrozumiałych zasadach, wolny od przedmiotów, których nie potrafimy zbudować. Możemy to osiągnąć pod warunkiem, że pozbędziemy się metafizycznego pojmowania takich indywiduów, jak liczba 1, liczba 2 itd. - należy je uważać po prostu za pewnego typu wyrażenia

[2] L. Chwistek: *Granice nauki*, w: L. Chwistek: *Pisma filozoficzne i logiczne*, t. 2. Warszawa 1963.

ujęte w „zmechanizowany system, wolny od wszelkiej intuicyjnej domieszki”[3].

By dać wyobrażenie o Chwistka sposobie budowania wyrażeń, dzięki którym można wyrazić pojęcia arytmetyczne bez odwoływania się do bytów metafizycznych, przedstawimy kilka najprostszych definicji jego systemu. Na początku wprowadza on określenia przedmiotów semantyki, które nazywa wyrażeniami właściwymi - te z kolei dzieli na wyrażenia stałe i zmienne.

REGUŁY BUDOWANIA WYRAŻEŃ:

I. 0 jest wyrażeniem stałym.

II. Jeżeli E, F są wyrażeniami stałymi, to *EF jest wyrażeniem stałym.

III. Jeśli E jest wyrażeniem stałym, to E jest wyrażeniem właściwym.

IV. Litery a, ß, γ, δ, η, ζ, λ, μ, ν są literami semantycznymi.

V. Jeśli E jest literą semantyczną, to E jest wyrażeniem właściwym.

VI. Jeśli E, F są wyrażeniami właściwymi, to *EF jest wyrażeniem właściwym.

VII. Jeśli E jest wyrażeniem właściwym i jeśli E zawiera literę semantyczną I, to E jest wyrażeniem zmiennym[4].

Reguły te pozwalają nam na zbudowanie na przykład następujących wyrażeń stałych: ***0000, **00, oraz następujących wyrażeń zmiennych: *10, **λμν, *10 itd. Można pokazać, że przyjęta symbolika jest jednoznacznie określona posługując się odpowiednio przeformułowaną zasadą indukcji zupełnej:

*Jeśli jakąś właściwość posiada 0 i litery, i jeśli z tego, że posiadają ją wyrażenia właściwe E, F, wynika, że posiada ją wyrażenie właściwe *EF, to właściwość tę posiadają wszystkie wyrażenia właściwe, które potrafimy zbudować przy pomocy tych reguł.*

[3] Tamże s. 52.

[4] Por. Tamże s. 56-57.

W tak zbudowanym systemie wyrażeń dowodzi się wielu twierdzeń oraz można zinterpretować podstawowe pojęcia arytmetyki: liczby, działania na liczbach, relacje między liczbami oraz można wyrazić twierdzenia arytmetyczne. System Chwistka jest wyjątkowo ezoteryczny i, bez dużej praktyki w operowaniu trudną i skomplikowaną aparaturą formalną, nieprzejrzysty.

W systemie tym można zdefiniować pewną funkcję (*λλ *00 0 λ) a odwołując się do indukcji możemy stwierdzić, iż pierwiastków tej funkcji jest nieskończenie wiele i że tworzą one ciąg:

00,*
00,**00 itd.

Pierwiastki tej funkcji utożsamimy z liczbami naturalnymi, dla których będziemy używali następujących skrótów:

*00 -	1
**00*00 -	2
***00*00**00*00 —	3, itd.

Pominę prezentację najprostszych nawet rachunków arytmetycznych w systemie Chwistka, gdyż zrozumienie sposobów ich przeprowadzania może być trudne dla czytelnika, który nie odbył treningu posługiwania się językiem symbolicznym[5].

Chwistek „otrzymał” liczby naturalne odwołując się do mechanicznej procedury operowania ustalonymi wyrażeniami. Okazuje się jednak, że można tego dokonać dysponując dosłownie „niczym”.

Popularne stwierdzenie głosi, że „z próżnego i Salomon nie naleje”. Ale widocznie Salomon nie znał współczesnej matematyki. Okazuje się, że matematycy świetnie dają sobie radę z „niczym” - czyli czymś, co nic nie zawiera, co jest „puste”. Co więcej potrafią z „niczego” otrzymać cały bogaty świat królowej nauk - matematyki. Wykorzystują do tego

[5] Por. J. Mrozek: *Logiczne podstawy arytmetyki* w *świetle Leona Chwistka teorii wyrażeń semantycznych,* w: *Logiczne podstawy rozumowań Ill* pod red. J. Mrożka. Gdańsk 2003, s. 92-110.

pojęcie zbioru pustego - zbioru, który nie zawiera żadnych elementów - pojęcie odległe od intuicji potocznej myślenia o zbiorach.

Na co dzień pojęcie zbioru rozumiemy w sensie kolektywnym jako nagromadzenie, zebranie w jedną całość rzeczy pewnego rodzaju. Jest to rozumienie odwołujące się do konkretności, praktyki codzienności. W ten sposób rozumiemy łańcuch - jako zbiór ogniw, bibliotekę - jako zbiór książek[6]. W tym sensie rozumienia pojęcia „zbiór", pojęcie zbioru pustego jawi się jako paradoksalne, kojarzące się z nieistnieniem, niebytem. Bowiem jak może istnieć zbiór, który nic nie gromadzi, na który nic się nie składa. Pojęciem zbioru w sensie kolektywnym zajmuje się mereologia - stworzona przez Stanisława Leśniewskiego.

Matematyczna teoria zbiorów nazywana jest w Polsce teorią mnogości. W teorii mnogości używamy pojęcia zbioru w sensie dystrybutywnym. Nie jest on wtedy niczym konkretnym - jest raczej abstrakcyjnym wyróżnieniem pewnego typu obiektów, ze względu na określoną własność. W takim sensie pojęcie „zbiór" wyznacza pewien rodzaj czy gatunek, ujmuje myślowo w pewną całość określoną klasę dowolnych przedmiotów. Zbiór w sensie dystrybutywnym nie jest zatem zmysłowo postrzegalny, nawet wtedy gdy jego elementy są takimi przedmiotami[7].

W matematyce współczesnej istnieje bardzo silna tendencja do uznania teorii mnogości za teorię bazową dla całej matematyki. Wyraża się to w dążeniu do definicyjnego utożsamiania obiektów matematycznych z pewnymi zbiorami. Przykładowo, figura płaska jest to określony zbiór punktów na płaszczyźnie. Podobnie liczby naturalne definiuje się po prostu jako pewne konstrukty teoriomnogościowe.

Teoria mnogości jest teorią zaksjomatyzowaną. Jeden z jej aksjomatów stwierdza:

Istnieje zbiór, do którego nie należy żaden element (zbiór pusty 0)

Postulowanie istnienia zbioru pustego wynika z przyjętych wcześniej definicji operacji na zbiorach rozumianych intuicyjnie[8]. Z tego właśnie zbioru - zbioru pustego - można otrzymać cały «świat» matematyki.

[6] Por. *Mała Encyklopedia Logiki,* pod red. W. Marciszewskiego. Wrocław 1988, s. 224.

[7] Por. R. Murawski: *Filozofia matematyki. Zarys dziejów.* Warszawa 1995, s. 165.

[8] Por. K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości.* Warszawa 1978, §.2.

Czy to możliwe, aby najbardziej wyrafinowane obiekty matematyczne powstawały z niczego? Zobaczmy na początek jak „z niczego” powstają liczby naturalne.

- •0 = Ø- (zero utożsamiamy ze zbiorem pustym)
- 1 = {0} = {Ø} — (jedynkę utożsamiamy ze zbiorem, którego jedynym elementem jest zbiór pusty)
- 2 = {O,1} = {Ø, {Ø}}
- 3 = {0, 1,2} = {Ø, {Ø},{Ø,{Ø}}}
- 4 = {0, 1, 2, 3} = {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}},{Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}}; itd.

Na co dzień tak nie myślimy o liczbach, ale teoretycznie da się „zbudować” każdą liczbę ze zbioru pustego. A skoro liczby naturalne są podstawą znacznej części matematyki możemy przyjąć, że większość badanych w matematyce obiektów może być zinterpretowana jako konstrukcja (niezwykle skomplikowana) wykonywana na zbiorze pustym.

Aby choć trochę zdać sobie sprawę ze stopnia komplikacji, jakiego dostarcza takie podejście zobaczmy jak wyglądają elementarne operacje liczbowe przy operowaniu zbiorami utożsamionymi z liczbami.

Dodawanie:
(1) n+l = n Ǔ{n}
(2) n + (m +1) = (n + m) + 1

Mnożenie:
(1) n x 1 = n
(2) n x (m + 1) = (n X m) + m

Gdy mamy już liczby naturalne stosunkowo prosto możemy podać definicje liczb całkowitych, wymiernych i, w sposób nieco bardziej skomplikowany, liczb rzeczywistych i zespolonych. Nowe rodzaje liczb są zatem w ostatecznym rachunku konstruktami teoriomnogościowymi, składają się ze zbiorów. Razem one stanowią bazę dla olbrzymiego obszaru badań matematycznych, bowiem wiele ważnych działów matematyki na nich się opiera np. analiza matematyczna, teoria funkcji.

Powstaje jednak obiekcja, czy liczby naturalne naprawdę są zbiorami? Wydaje się bowiem, że pojęcie „liczby naturalnej” posiada określony sens niezależny od pojęcia zbioru. W istocie ludzie posługiwali się liczbami naturalnymi na długo przed powstaniem matematycznego pojęcia „zbioru”. Zwolennicy rygoryzmu w definiowaniu pojęć matematycznych stwierdzą, że przed sformułowaniem definicji teoriomnogościowej ludzie posługiwali się pojęciem liczby naturalnej w niejasny i nieprecyzyjny sposób. Nie można więc uważać, że pojęcia te miały ustalone jednoznacznie odniesienie. Podejście to ma jednak mankamenty. Otóż okazuje się, że możliwych jest więcej niż jedna definicja, utożsamiająca liczby ze zbiorami.

Przykładowo: 0 = Ø; 1 = {Ø}; 2 = {{Ø}}; 3 = {{{Ø}}} itd.

Nie widać żadnych powodów, dla których jedna możliwa definicja miałaby być traktowana jako lepsza czy bardziej prawdziwa od innej. Trudność jest zasadnicza, gdy obiekty matematyczne traktujemy jako istniejące niezależnie od nas i niezależnie od tego, co możemy o nich wiedzieć.

• Trudności tej stara się uniknąć tzw. strukturalistyczna interpretacja matematyki. Według niej źródłem omawianego problemu jest przyjęcie, że teorie matematyczne opisują pewne pojedyncze obiekty. Na przykład, arytmetyka opisuje liczby naturalne. Strukturaliści głoszą natomiast, że właściwym przedmiotem arytmetyki jest struktura liczb naturalnych. Struktura jest rezultatem abstrahowania od indywidualnych cech obiektów i rozpatrywania tylko ich cech relacyjnych. Czym przy takim ujęciu są liczby naturalne? Zgodnie z najbardziej podstawowym ujęciem są to po prostu pewne, w odpowiedni sposób uporządkowane obiekty. Nie ma natomiast znaczenia, czym naprawdę są poszczególne liczby. Są to „miejsca” w strukturze. Przykładowo liczba zero w przypadku rozpatrywania zbioru liczb całkowitych (by nie ograniczać naszych rozważań jedynie do liczb naturalnych), to po prostu pewne wyróżnione miejsce w strukturze. Nie ma sensu pytać o inne cechy tego "obiektu” niż te, które wynikają z relacji łączących je z pozostałymi obiektami.

Wynika z tego, że nie ma potrzeby uważania liczb naturalnych za obiekty typu teoriomnogościowego. Możliwość sformułowania definicji liczb naturalnych na gruncie teorii zbiorów pokazuje jedynie, że struktura liczb naturalnych daje się wymodelować w bogatszej strukturze zbiorów. Przy takiej interpretacji pojedyncze liczby w ogóle nie stanowią realnych bytów matematycznych. Tym, co istnieje jest struktura algebraiczna. Te same struktury mogą być charakteryzowane na różne sposoby a więc nie sam "opis" jest istotny. Można - przykładowo - charakteryzować strukturę liczb naturalnych za pomocą relacji porządkującej (relacji mniejszości), ale również można wprowadzać tę strukturę za pomocą operacji „brania następnika”.

Podejście strukturalistyczne unika problemu określania „istoty” przedmiotów matematycznych zachowując intuicje większości matematyków, dotyczące obiektywnego istnienia rzeczywistości matematycznej. Cel ten został osiągnięty dzięki założeniu, że matematyka nie musi przyjmować obiektywnego istnienia pojedynczych przedmiotów matematycznych a jedynie istnienie pewnych „całości", czyli struktur matematycznych. Tym samym znika cały mistycyzm „matematycznego niebytu” takich pojęć jak zero czy zbiór pusty. Ich matematyczny sens sprowadza się do formalnego funkcjonowania jako elementów struktury.

Summary

The paper deals with the elementary considerations of the notions of zero and an empty set which, on the grounds of mathematics, can be treated as an ‘equivalent’ of the metaphysical notion of non-existence.

Zero - in everyday thinking - is treated as an equivalent of the notion ‘nothing’, therefore, qualitatively, it seems to be different from the remaining numbers. In everyday life, in conventional applications of numbers, we don’t need to use zero (we say I don’t have money, and not I have zero zloties).

Customarily, we understand a set as some ‘accumulating’ or ‘assembling’ things of one kind into one unity. This is a notion which appeals to the practice of everyday life. In this way we understand a chain as a set of links and a library as a set of books. In this sense of understanding the notion of ‘set’, the notion of an empty set seems paradoxical, connected with non-existence, nonentity. How can a set exist which ‘collects’ nothing or which is composed of ‘nothing’.

It appears that in contemporary mathematics the notions of zero and an empty set function as ordinary elements of a broader mathematical structure and hence they have a sense devoid of metaphysical contexts.

Key words: zero, empty set, mathematics.