EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 46 2008

TOMASZ A. PUCZYŁOWSKI
Uniwersytet Warszawski

NIEWIEDZA I WSZECHWIEDZA

Celem pracy jest przedstawienie tzw. paradoksu Fitcha oraz kilku spostrzeżeń dotyczących wiedzy, przekonań, ich granic. Przedstawiona zostanie argumentacja analogiczna do argumentu Fitcha, a odnosząca się do pojęcia przekonania. Określone zostaną związki między maksymalnością wiedzy (względnie przekonań), wszechwiedzą a twierdzeniem Fitcha. Wskazanych zostanie kilka pouczających błędnych aplikacji argumentacji Fitcha.

1. Uwagi wstępne. „Czy są rzeczy, których człowiek nie może wiedzieć?" pyta W. V. O. Quine w *Granicach wiedzy* (Quine 1983, s. 17). Na to stale intrygujące pytanie Quine odpowiada przecząco: nie istnieją stany rzeczy, które nie mogą być przedmiotem wiedzy człowieka. W pracy będziemy starali się wykazać, że z pewnych ogólnych względów rozstrzygnięcie Quine'a może być pochopne, a twierdząca odpowiedź – wbrew Quine'owi – możliwa. Przedstawiony zostanie dalej argument F. Fitcha (Fitch 1963) na rzecz tezy: jeśli pewien fakt nie jest nikomu znany, to istnieje pewien fakt, który nie może być nikomu znany.

W zależności od supozycji, w której użyta jest nazwa „człowiek", odpowiedź twierdzącą na pytanie Quine'a można rozumieć następująco:

(1) Istnieją stany rzeczy (fakty), o których nie może wiedzieć pewien człowiek; (2) Istnieją stany rzeczy (fakty), o których nie może wiedzieć żaden człowiek; (3) Istnieją stany rzeczy (fakty), o których nie może wiedzieć pewna zbiorowość.

Niech zmienna p reprezentuje zdanie stwierdzające zajście określonego stanu rzeczy, wyrażenie $\neg Kxp$ – to, że podmiot x nie wie, że ów stan rzeczy ma (miał) miejsce, konieczność tego, że p (rozumianą tu zgodnie z S5) oznaczmy przez $\mathbf{L}p$ a to, że jest to możliwe przez $\mathbf{M}p$. Przy tych oznaczeniach powyższe twierdzenia zapisać można następująco:

$(\exists p)\ (p \wedge \mathbf{L}\ (\exists x)\ \neg Kxp)$
Pewien fakt z konieczności nie jest komuś znany

Pewnej prawdy z konieczności ktoś nie zna[1]
$(\exists p)\ (p \wedge \mathbf{L}\ (\forall x)\ \neg Kxp)$
Pewien fakt z konieczności nie jest znany nikomu
Pewnej prawdy z konieczności nikt nie zna
$(\exists p)\ (p \wedge \mathbf{L}\ (\forall G)\ \neg K_g Gp)$
Pewien fakt z konieczności nie jest znany żadnej grupie
Pewnej prawdy z konieczności nie zna żadna grupa ludzi
przeczące odpowiedzi zaś:
(Neg1) $(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\forall x)\ Kxp)$
Każdą prawdę może poznać każdy
Każdy fakt może zostać poznany przez każdego
(NEG2) $(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists x)\ Kxp)$
Każdą prawdę może ktoś poznać
Każdy fakt może zostać poznany przez kogoś
(NEG3) $(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists G)\ K_g Gp)$
Każdą prawdę może poznać pewna zbiorowość
Każdy fakt może zostać poznany przez pewną zbiorowość

Przez to, że sąd – wyrażany w zdaniu reprezentowanym przez p, lub stan rzeczy – stwierdzony w zdaniu reprezentowanym przez p – jest przedmiotem wiedzy jakiejś osoby x, rozumieć należy tyle, iż prawdą jest, że x wie, że p (symbolicznie: Kxp)).

Podmiotem epistemicznym (przedmiotem askrypcji wiedzy) jest każdy i tylko ten, kto coś wie – w przyjętej notacji: [2]

x jest podmiotem epistemicznym $\Leftrightarrow_{df} (\exists p)\ Kxp$.

Wyprzedzając możliwe zarzuty sceptyka, można również pojecie podmiotu epistemicznego osłabić:

x jest podmiotem epistemicznym $\Leftrightarrow_{df} (\exists p)\ \mathbf{M}\ Kxp$.

W powyższych definicjach nie jest określony status zdania stwierdzającego stan rzeczy znany podmiotowi. Gdy przedmiotem analiz jest pojęcie wiedzy – które przypisywane jest podmiotowi nie ze względu na jego faktyczne deklaracje w tym względzie, lecz ze względu na to, ja-

[1] Mamy nadzieję, że nie jest zbyt dalekim nadużyciem przyjęcie na potrzeby tej pracy, że każdemu faktowi odpowiada jakiś sąd. Dlatego – o ile nie będzie powodowało to nieporozumień – formuły będziemy odczytywać dwojako.

[2] Patrz np. (Rescher 2002 i 2006).

kich, indagowany, udzieliłby lub do udzielenia których ma wystarczające informacje – to przypisać można by podmiotowi wiedzę o wszystkim, co jest konieczne. Otrzymalibyśmy wtedy:

x jest podmiotem epistemicznym $\Leftrightarrow_{df} (\forall p)$ ($\mathbf{L}p \Rightarrow \mathrm{K}xp$).

Skoro zaś istnieją prawdy konieczne (są nimi np. prawdy logiczne), toteż można by przyjąć:

$(\exists p)\ (\forall \mathrm{x})\ (p \wedge \mathrm{K}xp)$.

Takie określenie podmiotu epistemicznego wydaje się jednak być zbyt daleko idącą idealizacją.

O ile nie jest się sceptykiem, (zgodzić się można na to, że) każdy podmiot epistemiczny wie coś, co konieczne nie jest:

$(\forall \mathrm{x})\ (\exists p)\ (\neg \mathbf{L}p \wedge \mathrm{K}xp)$

jak również każdemu coś nie jest wiadome:

$(\forall \mathrm{x})\ (\exists p)\ (p \wedge \neg \mathrm{K}xp)$

Gdyby tak nie było, to nie byłoby możliwe rozróżnienie (na tym poziomie opisu) dwu podmiotów epistemicznych, bowiem:

$\mathrm{x} \neq \mathrm{y} \Leftrightarrow_{df} (\exists p)\ (\mathrm{K}xp \wedge \neg \mathrm{K}yp)$

Powyżej zaproponowaną definicję identyczności podmiotów można próbować zawęzić do:

$\mathrm{x} = \mathrm{y} \Leftrightarrow_{df} (\forall p^*)\ (\mathrm{K}xp^* \Leftrightarrow \mathrm{K}yp^*)$

gdzie p^* jest zmienną zdaniową reprezentującą pewne zdanie proste stwierdzające określoną sytuację prostą, fakt atomowy.

To, że jeden podmiot epistemiczny różni się od drugiego nie oznacza, że wiedza (dotycząca *faktów atomowych*, reprezentowanych przez zmienne zdaniowe), która ich rozróżnia, odróżnia ich w sposób konieczny. To, co wie pierwszy podmiot a czego nie wie drugi, to co w powyższym rozumieniu sprawia, że są różnymi podmiotami, może być przedmiotem wiedzy innego, trzeciego. Innymi słowy nie będzie tezą to, że:

$(\forall \mathrm{x})\ (\exists p^*)\ (\mathrm{K}xp^* \wedge \mathbf{L}\ (\forall \mathrm{y})\ (\mathrm{K}yp^* \Rightarrow \mathrm{y}=\mathrm{x}))$, (gdzie zmienna p^* przebiega zbiór *faktów atomowych, sytuacji prostych*)

bowiem możliwe jest, by wszystko (co do faktów atomowych) znane podmiotowi, było znane również jakimś różnym od niego podmiotom.

$(\forall \mathrm{x})\ (\forall p^*)\ (\mathrm{K}xp^* \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists \mathrm{y})\ (\mathrm{K}yp^* \wedge \mathrm{y}\neq\mathrm{x}))$.

Twierdzenie to będzie prawdziwe np. w strukturze, w której podmiot *a* wie wyłącznie, że p_1*, oraz że p_2*, podmiot *b* wie wyłącznie, że p_1*, a podmiot c, że p_2*. Zwróćmy uwagę, że podmiot a wie coś, czego nie wie nikt poza nim; tego, że $p_1^* \wedge p_2^*$ – nie jest to jednak wiedza dotycząca faktu atomowego. Obserwacja ta prowadzi do wniosku, że zdaniem odróżniających jeden przedmiot askrypcji wiedzy od innego jest koniunkcja zdań, które opisują stan jego wiedzy. Choć jest zapewne prawdą, że każdy podmiot epistemiczny wie coś, czego nie wie nikt poza nim (co zapisać można: $(\forall x)\ (\exists p)\ (Kxp \wedge (\forall y)\ (Kyp \Rightarrow y=x)))$, to twierdzenie to nie jest ogólnie prawdziwe. Wyobrazić sobie bez sprzeczności można, że z dwóch różnych podmiotów jeden wie dokładnie wszystko to, co wie drugi a nadto pierwszy wie coś, czego nie wie drugi. Nie można z góry wykluczyć świata pozbawionego sekretów (sekretem x jest coś, co wie tylko x)[3].

Wiedzę przypisywać można bądź indywiduom, bądź pewnym ich zbiorom. Równie poprawnie co „Tomasz Puczyłowski wie, że Ziemia jest geoidą" powiedzieć można „Ludzie w XIX wieku wiedzieli, że Ziemia jest geoidą", albo „Starożytni Grecy wiedzieli, że Ziemia jest geoidą". Wiedzę grupową określić można w oparciu o wiedzę indywidualną na kilka nierównoważnych sposobów (poniższa lista bynajmniej nie wyczerpuje wszystkich możliwości – poniżej podane są tylko te najbardziej interesujące i oczywiste):

$K_aGp \Leftrightarrow_{df} (\exists x \in G)\ Kxp$

Społeczność osób coś wie, gdy pewien jej członek to coś wie

$K_bGp \Leftrightarrow_{df} (\forall x \in G)\ Kxp$

Społeczność osób coś wie, gdy każdy jej członek wie owo coś z osobna

$K_cGp \Leftrightarrow_{df} (\exists x_1 \in G) \ldots (\exists x_n \in G)\ (\exists p_1) \ldots (\exists p_n)\ (Kx_1p_1 \wedge \ldots \wedge Kx_np_n \wedge p \in Cn(\{p_1\} \cup \ldots \cup \{p_n\}))$

Społeczność osób coś wie, gdy owo coś wynika z tego, co wiedzą jej członkowie z osobna

$K_dGp \Leftrightarrow_{df} (\exists x_1 \in G)\ Kx_1\ (\exists x_2 \in G)\ Kx_2p$

Społeczność osób coś wie, gdy pewien jej członek wie, że ktoś w tej grupie to coś wie

---

[3] Interesujące wydaje się zbadanie ewentualnych różnic między światem z sekretami i światem, w którym by ich nie było.

$K_eGp \Leftrightarrow_{df} (\exists x_1 \in G)\ Kx_1\ (\forall x_2 \in G)\ Kx_2p$

Społeczność osób coś wie, gdy pewien jej członek wie, że każdy jej członek wie owo coś z osobna

$K_fGp \Leftrightarrow_{df} (\forall x_1 \in G)\ Kx_1\ (\exists x_2 \in G)\ Kx_2p$

Społeczność osób coś wie, gdy każdy jej członek z osobna wie, że ktoś w grupie owo coś wie

$K_gGp \Leftrightarrow_{df} (\forall x_1 \in G)\ Kx_1\ (\forall x_2 \in G)\ Kx_2p$

Społeczność osób coś wie, gdy każdy jej członek wie, że wszyscy oni owo coś wiedzą

(H) $K_hGp \Leftrightarrow_{df} (\exists x_1 \in G)\ (\exists p_1)\ldots(\exists p_n)\ Kx_1\ (\exists x_2 \in G)\ldots(\exists x_n \in G)\ (Kx_2p_1 \wedge\ldots\wedge Kx_np_n \wedge p \in Cn(\{p_1\} \cup\ldots\cup (p_n\}))$

Społeczność osób coś wie, gdy owo coś wynika z czegoś, o czym ktoś z grupy wie, że jest wiedzą członków grupy[4].

Różnicę między (a) $Kx_1(\forall x_2 \in G)\ Kx_2p$ a (b) $(\forall x_2 \in G)\ Kx_1Kx_2p$ wyjaśnić można następująco. Przyjmijmy, że do grupy podmiotów G należą trzy podmioty epistemiczne: *a*, *b*, *c*. Niech *a* wie, że *a* wie, że *p*, że *b* wie, że *p*, że *c* wie, że *p*. W tej sytuacji prawdziwe jest (b), lecz (a) prawdziwe będzie, tylko jeśli *a* wie ponadto, że $G = \{a, b, c\}$.

By ustalić związki między (A) – (H), zgódźmy się, że jeśli $KxKyp$, to Kxp. Wtedy (A) wynika z osobna z (D), (D) wynika z (E); (B) zaś wynika z (F), a (F) wynika z (G). Z kolei z (H) wynika (C), a z (B) wynika (A).

Innymi słowy:

(E) $\vdash$(D) $\vdash$(A)
(G) $\vdash$(F) $\vdash$(B)
(H) $\vdash$(C)
(B) $\vdash$(A)

2. Granice wiedzy. Na pytanie, „o istnienie pytań – sensownych pytań – na które człowiek z zasady nie mógłby nigdy odpowiedzieć” (Quine 1983, s. 26), Quine odpowiada przecząco – nie ma żadnych sensownych pytań, na które człowiek nigdy nie mógłby odpowiedzieć. Na każde sensowne pytanie człowiek, indywiduum, podmiot epistemiczny, może udzielić kiedyś odpowiedzi – odpowiedzi właściwej oraz praw-

[4] Interesujące się zdaje to na gruncie których z powyżej przedstawionych rozumień wiedzy grupowej, powiedzenie: ‘Wiem, że *p*, ale ty tego nie wiesz’ prowadzi do pewnej postaci tzw. paradoksu Moore’a.

dziwej. Teza ta, tak ją rozumiemy, to twierdzenie, że każdą prawdę pewien człowiek (podmiot epistemiczny) może poznać, dowolny stan rzeczy może być podmiotowi znany, każdy prawdziwy sąd może być przedmiotem czyjejś wiedzy. Tezę Quine'a można tedy zapisać symbolicznie:

(Q) $(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists x)\ \mathrm{K}xp)$,

(przez wyrażenie $\mathbf{M}\alpha$ rozumiejąc 'możliwe, że α')

Twierdzenie Quine'a wydaje się o tyle zaskakujące, że świat (jaki znamy) jest światem podmiotów skończonych, tj. niewszechwiedzących. Oznacza to, że dla każdego podmiotu istnieje jakiś fakt danemu podmiotowi nieznany. Z niewątpliwej tej tezy

$(\forall x)\ (\exists p)\ (p \wedge \neg \mathrm{K}xp)$,

– jak za chwilę wykaże rozumowanie – wynika wniosek, że istnieją stany rzeczy (prawdy) nieznane nikomu:

(T1) $(\exists p)\ (p \wedge (\forall x)\ \neg \mathrm{K}xp)$,

Prawdziwość twierdzenia

(T1) $(\exists p)\ (\forall x)\ (p \wedge \neg \mathrm{K}xp)$

głoszącego, że pewne sądy prawdziwe nie są przedmiotem niczyjej wiedzy, uświadomić łatwo uzmysławiając sobie tyle, że jeśli istnieją dwa podmioty mające własne sekrety, to koniunkcja zdań stwierdzających ich sekrety wyraża właśnie ów sąd, który nie jest przedmiotem niczyjej wiedzy.

A jeżeli nikt nie ma żadnych sekretów? Czy taki świat jest niemożliwy? Nawet jeśli jest on możliwy, co – wierzymy – ma miejsce, to w dalszym ciągu istnieć będą prawdy, które przedmiotem niczyjej wiedzy być nie będą mogły. Każdy podmiot czegoś nie wie – jest podmiotem skończonym. Koniunkcja zdań, będących tymi prawdami, które są nieznane poszczególnym podmiotom, jest ową prawdą, nieznaną wszystkim. Świat może istnieć bez sekretów, ale zawsze jakaś prawda (jakiś stan rzeczy) będzie poza naszą wiedzą – świat podmiotów skończonych musi mieć swą tajemnicę.[5] Twierdzenie to wydawać się może paradoksalne. Z drugiej strony na pojęcie wiedzy nakładamy dość surowe wa-

[5] To mgliste twierdzenie zapisać można następująco:

$(\forall x)\ (\forall p)\ [(\mathrm{K}xp \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists z)\ (\mathrm{K}zp \wedge x{\neq}y)] \wedge (\exists p)\ (p \wedge \mathbf{L}\ (\forall x)\ \neg \mathrm{K}xp)\ )$

runki, które podmiot musi spełnić, zanim przypisać będzie można danemu podmiotowi wiedzę.

Jeżeli to, co (choć ma miejsce w tzw. świecie możliwym w_n, to) jest nieznane w możliwym świecie w_n, oznaczymy p^n, a nieznaną prawdę ze świata w_k – p^k, to zdaniem, które nie opisuje niczyjej wiedzy w n światach (k<n) będzie $p' = p^1 \wedge ... \wedge p^k \wedge ... \wedge p^n$. Zdanie p' nie musi być jednak w żadnym ze światów prawdziwe. Rezultat Fitcha może potwierdzać (ale nie dowodzić) przypuszczenie, że pewna tak określona koniunkcja jest prawdziwa.

Teza (Q), głoszona przez Quine'a, prowadzi jednak do tzw. modalnego kolapsu.

Polega on na tym, że przyjmując

(K) $(\forall x)\ (\forall p)\ (\forall q)\ (Kx(p \wedge q) \Rightarrow (Kxp \wedge Kxq)$

To, co wiadome kolektywnie, wiadome i dystrybutywnie,

oraz

(W) $(\forall x)\ (\forall p)\ (Kxp \Rightarrow p)$

Jeżeli wiadomo, że stan rzeczy zachodzi, to zachodzi,

a także sparafrazowane przez nas twierdzenie Quine'a

(Q) $(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists x)\ Kxp)$

Jeżeli jakiś stan rzeczy zachodzi, to możliwe, że istnieje ktoś, kto o tym wie

dowieść można:

(*) $(\forall p)\ (p \Rightarrow (\exists x)\ Kxp)$

Każdy stan rzeczy jest komuś znany

Każda prawda jest komuś znana

To zaś jest niezgodne z intuicyjnie prawdziwym:

(T1) $(\exists p)\ (p \wedge (\forall x)\ \neg Kxp)$,

O czymś nie wie nikt (lub: *Coś nie jest nikomu wiadome*)

głoszącym, że istnieją prawdziwe sądy, które nie są przedmiotem niczyjej wiedzy (albo: są fakty, o których zajściu nikt nie wie). (T1) jest prawdziwe, gdyż np. ile dokładnie monet miał w kieszeni piszący te słowa 1 kwietnia 2006r. nie wie nikt, nawet on sam. (T1) jest prawdziwe w każdym świecie, w którym nie ma podmiotów wszechwiedzących.

Dowód (*) – przy założeniu (K), (W), (Q) – przeprowadzić można następująco (niech p reprezentuje dowolne zdanie stwierdzające zajście określonego stanu rzeczy)

1. $(\exists x)\, Kx(p \wedge \neg(\exists y)\, Kyp) \Rightarrow ((\exists x)\, Kxp \wedge (\exists x)\, Kx\neg\, (\exists y)\, Kyp)$ Podstawienie (K)
2. $(\exists y)\, Ky\neg(\exists x)\, Kxp \Rightarrow \neg(\exists x)\, Kxp$ Podstawienie (W)
3. $\neg(\exists x)\, Kx\, (p \wedge \neg(\exists y)\, Kyp)$ MT: 1, 2
4. $(\forall x)\, \neg Kx\, (p \wedge \neg(\exists y)\, Kyp)$
5. $\mathbf{L}\, (\forall x)\, \neg Kx(p \wedge \neg(\exists y)\, Kyp)$ Reguła Godela: 4
6. $\neg\mathbf{M}\, (\exists x)\, Kx(p \wedge \neg(\exists y)\, Kyp)$ Definicja **M:** 5
7. $(p \wedge \neg(\exists y)\, Kyp) \Rightarrow \mathbf{M}\, (\exists x)\, Kx(p \wedge \neg(\exists y)\, Kyp)$ Podstawienie (Q)[6]
8. $\neg(p \wedge \neg(\exists y)\, Kyp)$ MT: 6, 7
9. $(\forall p)\, (p \Rightarrow (\exists y)\, Kyp)$

Ostatni krok – $(\forall p)\, (p \Rightarrow (\exists y)\, Kyp)$ (*Jeżeli pewien stan rzeczy ma miejsce, to istniej ktoś, kto o tym wie*) – jak wyżej zostało zauważone, sprzeczny jest z (T1).

Powyższe rozumowanie pokazuje, że (T1), (K), (W), (Q) wraz z regułami klasycznej logiki i logiki modalnej prowadzą do sprzeczności. Któreś z nich powinno zostać odrzucone. Które?

Zdanie (K) jest konsekwencją dwu kontrowersyjnych twierdzeń, przyjmowanych zwykle w tzw. logice epistemicznej (czy, raczej, w formalnej teorii wiedzy):

$(\forall x)\, Kx\alpha$, jeśli $\alpha \in$ Taut

oraz

$(\forall x)\, Kx\alpha \Rightarrow (Kx(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow Kx\beta)$

zwanymi – odpowiednio – Zasadą Kompetencji Logicznej (ZKL) oraz Zasadą Domknięcia Podmiotu na Konsekwencje (ZDPK). Odrzucając racje, ZKL i ZDPK, nie jesteśmy jednak zmuszeni do odrzucenia ich logicznych następstw, a co za tym idzie, do odrzucenia (K).

Tezę (W) odrzuca J. Woleński (Woleński (2001), s. 28): „Kto więc używa zdania de se «Wiem, że A» ujawnia, że ma takie roszczenie [roszczenie do prawdziwości A]. Podobnie zdanie de alio «S wie, że A»

[6] Krok ten wydaje się szczególnie kontrowersyjny (patrz: Kvanvig 1995).

zakłada (czy nawet pociąga) zdanie «S ma roszczenie do tego, że A jest prawdziwe». Z tego oczywiście nie wynika, że A jest prawdziwe"

Niech teraz

(*1) A wie, że *p*;

(*2) A ma roszczenie do prawdziwości, że *p*;

(*3) *p*.

Jako oczywiste przyjmijmy: non((*2) $\vdash$ (*3)). Czy w takim razie (*1) $\vdash$ (*3)? Prześledźmy argumentację Woleńskiego. Należy rozpatrzeć dwie możliwości między (*2) a (*1):

(A) (*1) $\vdash$ (*2), ale wtedy wiedząc, że non((*2) $\vdash$ (*3)), nie trzeba wnosić, że non((*1) $\vdash$(*3))

(B) (*2) $\vdash$ (*1), a wtedy non((*1) $\vdash$ (*3)), bo gdyby ((*1) $\vdash$ (*3)) i (*2) $\vdash$ (*1), to mielibyśmy (na mocy przechodniości $\vdash$) (*2) $\vdash$ (*3), co sprzeczne z założeniem.

Jak widać to, że ze zdania *A wie, że p* nie wynika *p* można zasadnie utrzymać przyjmując, że (*2) $\vdash$ (*1), to jednak jest bardzo kontrowersyjne, o ile nie, po prostu, fałszywe.

Jeżeli zasady (K) i (W) (wraz z zasadą Godela głoszącą: jeżeli $\vdash\alpha$, to $\vdash \mathbf{L}\alpha$ oraz charakterystyką możliwości: jeżeli $\mathbf{L}\neg\alpha$, to $\neg\mathbf{M}\alpha$) chcieć utrzymać, to należy odrzucić przynajmniej jedno: (Q) względnie (T1). Skoro (T1) wydaje się być intuicyjnie prawdziwe, udowodnić je można przyjmując, że każdy podmiot jest podmiotem skończonym, tj. takim, który jakiejś prawdy nie zna, tedy należy odrzucić (Q) tym samym godząc się z tym, że istnieją prawdy, których nie może nikt poznać (czyli: $(\exists p)$ $(p \wedge \neg\mathrm{M}$ $(\exists x)$ $\mathrm{K}xp))$. Innymi słowy jeśli coś nie jest znane żadnemu podmiotowi, to coś nie może być przez nikogo poznane. Czyli, bardziej formalnie, jeżeli (T1), to nie-(Q);

jeśli $(\exists p)$ $(p \wedge (\forall x) \neg\mathrm{K}xp)$, to $(\exists p)$ $(p \wedge \neg\mathbf{M}$ $(\exists x)$ $\mathrm{K}xp)$

jeśli o czymś nikt nic nie wie, to pewnej prawdy nikt nie może poznać

3. Ekstrapolacja argumentu Fitcha. Interesujące i zaskakujące argumentacje niekiedy próbuje się błędnie stosować w innych dziedzinach przedmiotowych lub poszukuje się słabszych przesłanek prowadzących do równie interesujących i zaskakujących wniosków. Rozpatrzmy teraz słabsze od (T1) twierdzenie (T2) głoszące, że ktoś czegoś nie wie (np., tego, co myśli o swym sąsiedzie autor tych słów, sąsiad ów z całą pewnością nie wie):

(T2) $(\exists x)\ (\exists p)\ (p \wedge \neg Kxp)$.

Niech ponownie zmienna p reprezentuje dowolne zdanie stwierdzające pewien stan rzeczy:

1. $(\exists x)\ Kx(p \wedge \neg Kxp) \Rightarrow (\exists x)\ (Kxp \wedge Kx\neg Kxp)$	(K)
2. $(\forall x)\ (Kx\neg Kxp \Rightarrow \neg Kxp)$	(W)
3. $\neg(\exists x)\ Kx\ (p \wedge \neg Kxp)$	MT: 1, 2
4. $(\forall x)\ \neg Kx\ (p \wedge \neg Kxp)$	Reguła De Morgana: 3
5. $\mathbf{L}\ (\forall x)\ \neg Kx(p \wedge \neg Kxp)$	Reguła Godela: 4
6. $\neg\mathbf{M}\ (\exists x)\ Kx(p \wedge \neg Kxp)$	Definicja możliwości: 5
7. $(p \wedge \neg Kxp) \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists x)\ Kx(p \wedge \neg Kxp)$	Podstawienie (Q)
8. $\neg\mathbf{M}\ (\exists x)\ Kx(p \wedge \neg Kxp) \Rightarrow \neg(p \wedge \neg Kxp)$	Transpozycja: 7
9. $\neg\mathbf{M}\ (\exists x)\ Kx(p \wedge \neg Kxp) \Rightarrow (\forall x)\ \neg(p \wedge \neg Kxp)$	$\alpha \Rightarrow \beta(x)$ /:. $\alpha \Rightarrow (\forall x)\ \beta(x)$
10. $(p \Rightarrow (\forall x)\ Kxp)$	RO: 6, 9

Powyższe wydaje się prowadzić do wniosku, że jeśli (T2), to nie-(Q), czyli:

$(\exists p)$ (p oraz jeśli $(\exists x)\ \neg Kxp$), to $\neg\mathbf{M}\ (\exists x)\ Kxp$)

Istnieje pewna prawda taka, że jeśli ktoś jej nie zna, to nikt jej poznać nie może

oraz

$(\exists p)\ (\exists x)$ (p oraz jeśli Kxp, to $\neg\mathbf{M}\ Kxp$)

Istnieje pewna prawda i pewien podmiot epistemiczny taki, że jeśli jej nie zna, to nie może jej poznać.

Przedstawione wyżej rozumowanie jest jednak błędne, bowiem podstawienie (Q) w punkcie 7. dowodu jest nieprawidłowe. Prawidłowym podstawieniem (Q) w punkcie 7., czego nieostrożny czytelnik nie zauważy, powinno być

$(p \wedge \neg Kxp) \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists y)\ Ky(p \wedge \neg Kxp)$

Zauważmy jeszcze, że twierdzenie Fitcha nie twierdzi, że jeśli podmiot nie wie czegoś, to jest konieczne, że tego nie wie, czyli jeżeli podmiot nie wie, że p, to nigdy się tego nie dowie (formalnie: $(\forall x)\ (\forall p)\ (p \Rightarrow (\neg Kxp \Rightarrow \mathbf{L}\neg Kxp)))$

Zauważmy jednak, że twierdzenie Fitcha prowadzi do wniosku, że wiedza podmiotu nie może stanowić zbioru maksymalnego. Twierdzenie to i założenie maksymalności wiedzy $((\forall p)\ (Kxp \vee Kx\neg p))$ prowadzi do sprzeczności. Skoro bowiem podmiot nie znałby jakiejś prawdy (tj. $\neg Kxp \wedge p$), to – jeśli jego wiedza byłaby maksymalna – to przypisać temu podmiotowi można by było $Kx\neg p$. Z tego zaś wynika $\neg p$, co jest sprzeczne z założeniem. Innymi słowy, konsekwencją twierdzenia Fitcha jest, że

$\mathbf{L}\ (\forall x)\ (\exists p)\ (\neg Kxp \wedge \neg Kx\neg p)$

Konieczne jest, że każdy o czymś nie wie czy ma miejsce, czy też nie.

4. Modalny kolaps przekonań? Przekonania wydają się odbiegać w tym względzie od wiedzy. Pytani o to, co wiemy, chwilę zastanowimy się przed udzieleniem odpowiedzi, pomni na fakt, jak często ludzkie roszczenia do wiedzy okazywały i okazują się płonne. Tego typu refleksja rzadziej towarzyszy wypowiedziom o własnych lub cudzych przekonaniach, którym jednakowoż nie jesteśmy skłonni przypisywać statusu wiedzy. Wątpimy, by wykazać było można, że nie jesteśmy przekonani co do kulistości Ziemi, co do tego, że kobiety a nie mężczyźni rodzą dzieci, że cukier jest słodki, że 2+2=4. Z całą pewnością nasze działania są tu zgodne z naszymi deklaracjami. Gdybyśmy chcieli, moglibyśmy jednak deklarować przekonanie a nikt nie mógłby nam przeczyć, iż takowych przekonań nie mamy lub mieć nie możemy, że na Marsie istnieje życie, że $2^{1234567891234567 89} - 1$ nie jest liczbą pierwszą, że Tadeusz Kościuszko zjadł 3 maja 1792 roku obfite śniadanie itd. Wydaje się, że co do każdego sądu – prawdziwego czy fałszywego – każdy z nas może być przekonanym (tj. $(\forall p)\ (\forall x)\ \mathbf{M}\ Bxp$), gdzie wyrażenie Bxp czytamy ‘x jest przekonany, że *p*’). Wydaje się, że mogę z każdych dwu wzajemnie sprzecznych sądów – dość swobodnie – wybrać ten, z którego uczynię przedmiot swego przekonania. Wybierać z dwu będę np. ten, który będzie niesprzeczny z sumą wszystkich wcześniej wybranych. W ten sposób moje przekonania utworzą zbiór maksymalnie niesprzeczny, czyli taki że jeśli będzie należał do niego określony sąd, to sąd z nim sprzeczny już nie, i jeśli nie będzie należał jeden z nich, należeć będzie drugi. Tym bardziej intrygujące wydawać się musi pytanie, czy modalny kolaps można przenieść i na przekonania, czy można wykazać, iż twierdzenie, że każdy sąd może stać się przedmiotem czyjegoś przekonania, prowadzi do sprzeczności z innymi – przyjmowanymi charakterystykami – pojęcia przekonania. Ewentualna odpowiedź twierdząca byłaby o tyle zaskakująca, że warunki umożliwiające modalny kolaps przekonań nie wymuszają niesprzeczności przekonań. Tak jak ze względu na weredyczność nie może być prawdą: $\mathrm{Kx}p \wedge \mathrm{Kx}\neg p$, tak żaden z postulatów, które wydają się konieczne do powtórzenia argumentacji Fitcha, nie zabrania: $\mathrm{Bx}p \wedge \mathrm{Bx}\neg p$. Innymi słowy można utrzymywać jednocześnie, że (dla określonego podmiotu x) $(\exists p)\ (p \wedge (\neg \mathrm{Bx}p \wedge (\exists q)\ (\mathrm{Bx}q \wedge \mathrm{Bx}\neg q)))$. Gdyby $\mathrm{Bx}q \wedge \mathrm{Bx}\neg q$ generowało sprzeczność, nie można by było utrzymać, że $(\exists p)\ (p \wedge \neg \mathrm{Bx}p)$, a tym samym nie można by było utrzymywać, że $(\exists p)\ (p \wedge \mathbf{L}\neg \mathrm{Bx}p)$.

Podmiot epistemiczny zwykle nie odróżnia tego, co wie od tego, o czym jedynie myśli, że wie. Myśl tę Tokarz (Tokarz 1993, s. 169) zapisuje następująco: $(\forall p)\ \mathrm{Bx}\ (\mathrm{Bx}p \Rightarrow p)$[7]. Innymi słowy, podmiot może uważać, że pewien stan rzeczy ma miejsce, mieć wystarczające dla tego przekonania uzasadnienie a jednocześnie nie wiedzieć, gdyż ów stan rzeczy nie zachodzi (nie jest faktem). Pewnym swym przekonaniom podmiot może jednak odmawiać statusu wiedzy, na przykład sądząc, że brakuje mu wystarczających racji, które dane przekonanie by uzasadniały. Jeżeli teraz przyjąć, że przekonania dowolnego podmiotu mogą tworzyć zbiór maksymalny i zarazem niesprzeczny, to gdyby twierdzenia Fitcha można by przenieść na grunt przekonań, to można by dowieść, że konieczne jest, by możliwe było to, aby każdy podmiot epistemiczny żywił fałszywe przekonanie, czyli: $\mathbf{LM}\ (\forall \mathrm{x})\ (\exists p)\ (p \wedge \mathrm{Bx}\neg p)$. Uzasadnienie tej może zaskakującej tezy wyglądałoby następująco:

1. $\mathbf{L}\ (\exists p)\ (p \wedge \mathbf{L}\ (\forall \mathrm{x})\ \neg \mathrm{Bx}p)$ Ukoniecznościowione twierdzenie Fitcha (o ile jako tezę przyjmiemy: $(\forall \mathrm{x})\ (\exists p)\ (p \wedge \neg \mathrm{Bx}p)$)
2. $\mathbf{M}\ (\forall \mathrm{x})\ (\forall p)\ (\mathrm{Bx}p \vee \mathrm{Bx}\neg p)$ Założenie maksymalności
3. $(\forall \mathrm{x})\ (\forall p)\ (\mathrm{Bx}p \vee \mathrm{Bx}\neg p)$ OM: 2
4. $(\exists p)\ (p \wedge \mathbf{L}\ (\forall \mathrm{x})\ \neg \mathrm{Bx}p)$ OL: 1

[7] Z tezą tą nie zgadza się (Danielewiczowa 2002, s. 250).

5. $p_k \wedge \mathbf{L}\ (\forall x)\ \neg Bxp_k$ — O∃: 4
6. $\mathbf{L}\ (\forall x)\ \neg Bxp_k$ — OK: 5
7. p_k — OK.: 5
8. $Bxp_k \vee Bx\neg p_k$ — O∀: 3
9. $(\forall x)\ \neg Bxp_k$ — OL: 6
10. $\neg Bxp_k$ — O∀: 9
11. $Bx\neg p_k$ — OA: 10, 8
12. $p' \wedge Bx\neg p_k$ — DK: 11, 7
13. $(\exists p)\ (p \wedge Bx\neg p)$ — D∃: 12
14. $(\forall x)\ (\exists p)\ (p \wedge Bx\neg p)$ — D∀:13
15. $\mathbf{M}\ (\forall x)\ (\exists p)\ (p \wedge Bx\neg p)$ — DM: 14
16. $\mathbf{LM}\ (\forall x)\ (\exists p)\ (p \wedge Bx\neg p)$ (w oparciu o aksjomat S5: $\mathbf{M}p \Rightarrow \mathbf{LM}\,p$ i 15.)

Jeżeli możliwe jest, by przekonania (dowolnego) podmiotu tworzyły zbiór maksymalny, to z konieczności możliwe jest, że (gdyby twierdzenie Fitcha było prawdziwe w odniesieniu do przekonań) każdy podmiot epistemiczny wierzy w coś, co jest fałszem. Innymi słowy: nie jest konieczne, by jakikolwiek podmiot żywił choćby jedno przekonanie fałszywe. Łatwo bowiem zauważyć, że gdyby prawdą by było $(\exists p)\ (p \wedge \mathbf{L}\ (\forall x)\ \neg Bxp)$, to o każdym podmiocie x takim, że: $(\forall p)\ (Bxp \vee Bx\neg p)$, prawdą by było, że: $(\exists p)\ (p \wedge Bx\neg p)$.

Wróćmy jednak do zasadniczego pytania: czy argument Fitcha można rozszerzyć i na przekonania? Czy są takie sądy prawdziwe, które nie mogą być przedmiotem niczyjego przekonania? Przyjmijmy kilka tez opisujących pojęcie bycia przekonanym, analogicznych dla przyjętych wcześnie dla pojęcia wiedzy:

(B) $(\forall x)\ (\forall p)\ (\forall q)\ (Bx(p \wedge q) \Rightarrow (Bxp \wedge Bxq))$

(IP) $(\forall x)\ (\forall p)\ (Bx\neg Bxp \Rightarrow \neg Bxp)$

(M) $(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists x)\ Bxp)$

Poniższy ciąg nie jest jednak dowodem negacji twierdzenia (T3), głoszącego istnienie zdań prawdziwych, co do (treści) których nikt nie jest przekonany:

1. $(\exists x)\ Bx(p \wedge \neg(\exists y)\ Byp) \Rightarrow ((\exists x)\ Bxp \wedge (\exists x)\ Bx\neg(\exists y)\ Byp)$ z (B) poprzez podstawienie

2. $(\exists y)\ By\neg(\exists x)\ Bxp \Rightarrow \neg(\exists x)\ Bxp$ z (IP) poprzez podstawienie
3. $\neg(\exists x)\ Bx\ (p \land \neg(\exists y)\ Byp)$ MT: 1, 2
4. $(\forall x)\ \neg Bx\ (p \land \neg(\exists y)\ Byp)$ Reguła De Morgana: 3
4. $\mathbf{L}\ (\forall x)\ \neg Bx(p \land \neg(\exists y)\ Byp)$ Reguła Godela: 3
5. $\neg\mathbf{M}\ (\exists x)\ Bx(p \land \neg(\exists y)\ Byp)$ definicja możliwości: 4
6. $(p \land \neg(\exists y)\ Byp) \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists x)\ Bx(p \land \neg(\exists y)\ Byp)$ z (M) poprzez podstawienie
7. $\neg(p \land \neg(\exists y)\ Byp)$ MT: 6, 5
8. $(\forall p)\ (p \Rightarrow (\exists y)\ Byp)$

Jak należy zauważyć, krok 2. nie jest prawidłowym podstawieniem w (IP), dzięki czemu proste przeniesienie argumentu Fitcha na grunt formalnej teorii przekonań nie jest możliwe. Skoro twierdzenia Fitcha nie można wykazać na gruncie teorii przekonań, tedy nie trzeba przyjmować tego, że każdy podmiot, z konieczności, przekonany jest, co do pewnego fałszu. Można jednak, odwołując się do (B), (IP) oraz

(Mmod) $(\forall p)\ (p \Rightarrow (\forall x)\ \mathbf{M}\ Bxp)$

udowodnić: $(\forall p)\ (p \Rightarrow (\forall x)\ Bxp)$.

W tym celu przyjmijmy, że a jest ustaloną stałą nazwową, zaś p – zmienną zdaniową:

1. $Ba(p \land \neg Bap) \Rightarrow (Bap \land Ba\neg Bap)$ (B)
2. $Ba\neg Bap \Rightarrow \neg Bap$ (IP)
3. $\neg Ba(p \land \neg Bap)$ MT: 1, 2
4. $\mathbf{L}\neg Ba(p \land \neg Bap)$ Reguła Godela: 3
5. $\neg\mathbf{M}\ Ba(p \land \neg Bap)$
6. $(p \land \neg Bap) \Rightarrow \mathbf{M}\ Ba(p \land \neg Bap)$ (Mmod)
7. $\neg(p \land \neg Bap)$ MT: 6, 7
8. $(p \Rightarrow Bap)$

Ostatni krok jest sprzeczny z (T3) $(\exists p)\ (p \land (\forall x)\ \neg Bxp)$, który uzasadnić można podobnie jak w przypadku (T1). Otóż rozsądnie jest przyjąć, że każdy podmiot (a przynajmniej konsekwentny i niesprzeczny, lub sprzeczny ale niekonsekwentny) charakteryzuje się tym, że pewnych przekonań nie żywi. Przyjmijmy, że dla każdego x_i istnieje stan rzeczy p_i taki, że ma on miejsce, ale x_i nie wierzy, że p_i, czyli: $p_i \land \neg Bx_ip_i$. Innymi słowy, przyjmijmy, że dla dowolnego podmiotu istnieje zdanie prawdziwe, które nie opisuje treści jego mniemania. Niech teraz q będzie koniunkcją takich zdań spełniających powyższy warunek. Jasne jest, że żaden z podmiotów nie jest przekonany, że q a zarazem q jest zdaniem prawdziwym.

Formuła (IP) głosi, że nie może być tak, iż będąc co do czegoś przekonanym, podmiot jest jednocześnie przekonany, że nie jest co do tego czegoś przekonanym. Głosi, że jeśli jesteśmy przekonani, że w coś nie wierzymy, to – faktycznie – w to nie wierzymy. Innymi słowy nie możemy się mylić odnośnie naszych negatywnych przeświadczeń.

Czy twierdzenie (IP) jest racjonalne? Niewątpliwie przekonania są przedmiotem naszej refleksji, tzn. są przedmiotami przekonań. Czy mogę twierdzić szczerze (i tym samym ujawniać swoje przekonanie), że nie sądzę, by – powiedzmy – Iksiński był notorycznym złodziejem, a jednocześnie, by można było przypisywać mi przekonanie przeciwne? Ktoś widząc, że unikamy pozostawienia portfela w obecności Iksińskiego, że innym doradzamy podobne zachowanie, nie musiałby chcieć utrzymywać, iż sądzimy, że Iksiński jest złodziejem, ale sami przed sobą tego nie chcemy przyznać. Mógłby miast tego – nie podważając tym razem prawdziwości (IP) – powiedzieć, że nasza deklaracja „Nie sądzimy, by Iksiński był złodziejem" (bądź jej równoznaczna) nie była szczera, albo – w świetle naszych zachowań – nieprzemyślana. Albo też, że – jeśli przyjąć, że wypowiedź była szczera – nasze zachowanie pozajęzykowe dość nierozumne, «niezgodne» z zachowaniem werbalnym. Między innymi te racje skłaniają do uznania (IP).

Jeżeli zatem należy przyjąć (IP), utrzymywać w konsekwencji należy, że pewien podmiot epistemiczny nie może co do pewnej prawdy być przekonanym, czyli:

$(\exists p)\ (\exists \mathrm{x})\ (p \wedge \mathbf{L}\ \neg \mathrm{Bx}p)$.

Jest to bowiem prosta konsekwencja odrzucenia (Mmod) $(\forall p)\ (p \Rightarrow (\forall \mathrm{x})\ \mathbf{M}\ \mathrm{Bx}p)$.

Zauważmy w tym miejscu, że odwrotna implikacja, dotycząca wszelako wiedzy: $\neg \mathrm{Kx}p \Rightarrow \mathrm{Kx}\neg\mathrm{Kx}p$ nie jest, ogólnie rzecz biorąc, prawdziwa, nawet jeśli rozpatrujemy pojęcie wiedzy dyspozycyjne czy też inferencyjne[8]. Jan do wczoraj wiedział, gdzie jego żona spędza czas między 8 a 16; dziś, po raz pierwszy, żona Jana postanowiła spędzić ten czas z Marianem a nie w domu. Jan nie wie, że jego żona jest w domu (bo jest ona z Marianem), z czego oczywiście zdawać sobie sprawy nie może.

Czy argumentację Fitcha można zastosować na gruncie metamatematycznym? Wprowadźmy pojęcie dowodliwości w arytmetyce: niech $\vdash_{PA}\alpha$ znaczy tyle, co 'α ma dowód na gruncie arytmetyki Peano' oraz $Tr_{PA}(\alpha)$ – 'α jest prawdziwe w arytmetyce Peano'. Mamy wtedy:

(K) Jeżeli $\vdash_{PA}(\alpha \wedge \beta)$, to $(\vdash_{PA}\alpha \wedge \vdash_{PA}\beta)$

(F) Jeżeli $\vdash_{PA}\alpha$, to $Tr_{PA}(\alpha)$

Jeśliby teraz przyjąć

(M) $(\forall\alpha)$ (jeżeli $Tr_{PA}(\alpha)$, to możliwe, że $\vdash_{PA}\alpha$),

to otrzymalibyśmy, że

$(\forall\alpha)$ (jeżeli $Tr_{PA}(\alpha)$, to $\vdash_{PA}\alpha$).

To zaś jest fałszem (istnieją bowiem zdania arytmetyki wzajemnie sprzeczne, z których żadne nie zostało udowodnione) a zatem należy przyjąć negację (M), czyli należy przyjąć, że istnieją prawdziwe zdania arytmetyki, których nie można udowodnić. Czy nie otrzymujemy szybko i przekonująco tego, co tak nieprosto pokazał K. Godel. Prawda? Jeśli tak, to dziwna i niepokojąca. Szczęśliwie jednak argumentacji Fitcha nie można zastosować w powyższym wypadku, bowiem wyrażenie $\vdash_{PA}\mathrm{non}(\vdash_{PA}\alpha)$ jest pozbawione sensu, a wyrażenie to otrzymalibyśmy z (K) poprzez odpowiednie, tj. zgodne ze schematem argumentu Fitcha, podstawienie.

5. O podmiocie wszechwiedzącym. Stawiając problem granic wiedzy, Quine nie zadał pytania: czy może istnieć ktoś, kto wie wszystko? Czy może istnieć podmiot (indywidualny lub zbiorowy), który wie wszystko?

Skoro istnieją prawdy, których nikt nie zna, to żaden podmiot nie jest wszechwiedzący. Cóż to oznacza, że podmiot jest wszechwiedzący? Wszechwiedzący podmiot najprościej jest scharakteryzować następująco:

[8] Omówienie pojęcia wiedzy inferencyjnej np. w artykule Reschera (Rescher 1992, s. 478).

(Def) x jest wszechwiedzący, gdy $(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathrm{K}xp)$.

Nie jest to jednak jedyna charakterystyka definicyjna wszechwiedzącego podmiotu. Wskażemy poniżej na inną, pozornie nierównoważną, słabszą. Wszechwiedzę zrelatywizować również można do wiedzy innych podmiotów: wszechwiedzący to ten, kto wie wszystko to, co wiedzą inni.

Wykażemy teraz, że podmiot x jest wszechwiedzący (w powyższym rozumieniu, tj. wiedzący tyle, co inni), o ile prawdą jest

(O) $(\forall p)\ (\forall q)\ (\mathrm{K}x(p \vee q) \Rightarrow (\mathrm{K}xp \vee \mathrm{K}xq))$

W tym celu przyjmijmy nadto:

(W) $\mathrm{K}xp \Rightarrow p$

(K) $\mathrm{K}x(p \wedge q) \Rightarrow (\mathrm{K}xp \wedge \mathrm{K}xq)$

(L) $\mathrm{K}xp \Rightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \mathrm{K}xq)$

Przyjmijmy na potrzeby wywodu, że

a. Wiesz coś,

b. I pewien podmiot epistemiczny (czyli ktoś, kto coś wie),

c. Tego nie wie

Powyższe, zapisane symbolicznie, przedstawiają się następująco:

a. $\mathrm{K}yp$

b. $\mathrm{K}xq$

c. $\neg\mathrm{K}xp$

Jeżeli podmiot, o którym mowa w punkcie b., spełnia (O), to wykazać można, że punkty a., b., c. prowadzą do sprzeczności.

Prosty dowód tego faktu wygląda następująco:

1) $\mathrm{K}yp \Rightarrow p$	(W)
2) p	RO: 1) i a.
3) $p \Rightarrow \neg\mathrm{K}x\neg p$	transpozycja (W)
4) $\neg\mathrm{K}x\neg p$	RO: 2) i 3)
5) $\vdash q \Leftrightarrow [(q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)]$	teza k.r.z.
6) $\mathrm{K}xq$	powtórzenie b.
7) $\mathrm{K}x((q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p))$	(L) oraz 6) i 5)
8) $\mathrm{K}x((q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)) \Rightarrow [\mathrm{K}x(q \wedge p) \vee \mathrm{K}x(q \wedge \neg p)]$	(O)
9) $\mathrm{K}x(q \wedge p) \vee \mathrm{K}x(q \wedge \neg p)$	RO: 8) i 7)
10) $\mathrm{K}x(q \wedge \neg p)$	Założenie

11) $Kx(q \wedge \neg p) \Rightarrow Kx\neg p$ (K)
12) $Kx\neg p$ RO: 11, 10
13) $Kx\neg p \wedge \neg Kx\neg p$ DK: 12, 4
14) $\neg Kx(q \wedge \neg p)$ 10 ⇒ sprzecz.
15) $Kx(q \wedge p)$ OA: 14) i 9)
16) $Kx(q \wedge p) \Rightarrow Kxp$ (K)
17) Kxp RO: 15) i 16)

Zauważmy teraz, że punkt 17) jest sprzeczny z c. Tym samym wykazane zostało, że wszystko co jest przedmiotem czyjejś wiedzy jest też przedmiotem wiedzy osoby, która spełnia warunek (O). Wykazaliśmy, że każdy przedmiot x spełniający (O), spełni też formułę

$(\forall y)\ (\forall p)\ (Kyp \Rightarrow Kxp)$

Skoro – z tego co wiemy m.in. dzięki twierdzeniu Fitcha – żaden podmiot nie spełnia formuły (O), tedy:

$(\forall x)\ (\exists p)\ (\exists q)\ (Kx(p \vee q) \wedge \neg Kxp \wedge \neg Kxq)$

Czy podmiot x spełniający (O), spełnia w konsekwencji

$(\forall p)\ (p \Rightarrow Kxp)$?

Prosty dowód powyższego przeprowadzić można następująco:

1. p Założenie
2. $p \Rightarrow \neg Kx\neg p$ (W)
3. $\neg Kx\neg p$ MP: 1, 2
4. $Kx(p \vee \neg p)$ Na mocy definicji podmiotu epsitemicznego
5. $Kx(p \vee \neg p) \Rightarrow (Kxp \vee Kx\neg p)$ (O)
6. $Kxp \vee Kx\neg p$ MP: 4, 5
7. Kxp OA: 6, 3
8. $p \Rightarrow Kxp$ Reguła dowodu warunkowego: 1 – 7

Jedną z konsekwencji (O) jest również

$(\forall p)\ (Kxp \vee Kx\neg p)$

Formuła ta głosi zupełność (maksymalność) wiedzy podmiotu x – o dowolnym zdaniu podmiot ów jest w stanie rozstrzygnąć, czy prawdą jest ono czy jego negacja. Jak zauważone zostało wcześniej, i tę formułę należy odrzucić, przyjmując $(\forall x)\ (\exists p)\ (\neg Kxp \wedge \neg Kx\neg p)$

6. Wnioski. By pokazać, że wszystkie prawdy charakteryzuje operator zdaniowy F, tj. by udowodnić, że dla dowolnej zmiennej zdaniowej p: $p \Rightarrow Fp$, operator F powinien zdaniem J. J. MacIntosha ((MacIntosh 1984), (Rescher 2006, s. 64)) spełniać następujące trzy warunki:

$F(p \wedge q) \Rightarrow (Fp \wedge Fq)$

$Fp \Rightarrow p$

$p \Rightarrow \mathbf{M}F\mathrm{p}$

Mając w pamięci niedawne uwagi dotyczące pojęcia dowodliwości $\vdash_{\mathrm{PA}}$, warto jednak pamiętać o zawężonej reprezentacji symbolu F do operatorów z poziomu języka przedmiotowego, które są funktorami zdaniotwórczymi od argumentów zdaniowych (a nie nazwowych jak w przypadku $\vdash_{\mathrm{PA}}$).

Choć sam funktor B nie ma własności opisanych przez Macintosh, pokazaliśmy, że argumentację Fitcha można również – chociaż w ograniczonym stopniu – odnieść w interesujący sposób do przekonań.

Quine utrzymuje, że

$(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists \mathrm{x})\ \mathrm{Kx}p)$.

Jeżeli Quine nie ma racji, na co wskazywałoby twierdzenie Fitcha, to czy jednak nie można by utrzymywać:

$\mathbf{M}\ (\exists \mathrm{G})\ (\forall p)\ (p \Rightarrow \mathrm{K_aG}p)$

względnie

$(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists \mathrm{G})\ \mathrm{K_aG}p)$?

Jedno z zaproponowanych rozumień wiedzy grupowej (np. w punkcie (C)) pozwalało przypisywać grupie wiedzę, że p i w takiej sytuacji, w której żaden z podmiotów tę grupę tworzących, nie wiedział, że p: to że p miało – przy tym rozumieniu wiedzy grupowej – wynikać z pewnej sumy wiedzy podmiotów do niej należących. To, czy wniosek Fitcha można odnieść i do tego rozumienia wiedzy grupowej (C) zależy od tego czy należy przyjąć

(K) $(\forall \mathrm{G})\ (\forall p)\ (\forall q)\ (\mathrm{K_cG}(\mathrm{p} \wedge q) \Rightarrow (\mathrm{K_cG}p \wedge \mathrm{K_cG}q)$

(W) $(\forall \mathrm{G})\ (\forall p)\ (\mathrm{K_cG}p \Rightarrow p)$

(Q) $(\forall p)\ (p \Rightarrow \mathbf{M}\ (\exists \mathrm{G})\ \mathrm{K_cG}p)$

(T1) $(\exists p)\ (\exists \mathrm{G})\ (p \wedge \neg \mathrm{K_cG}p)$.

Żadna z czterech wyżej zaproponowanych formuł nie wydaje się być (bez dalszej analizy) fałszywa.

Przyjmując $(\exists p)\ (p \wedge (\forall x)\ \neg Bp)$ (wraz z (B) i (IP)) należy przyjąć również to, że

$(\exists p)\ (\exists x)\ (p \wedge L\neg Bxp)$

Pewnej prawdy, ktoś z konieczności nie żywi

O pewnym fakcie ktoś z konieczności nie jest przekonany

co wydaje się dość interesujące i warte, być może, dalszej refleksji.

Bibliografia

Danielewiczowa, M. (2002) *Wiedza I niewiedza. Studium polskich czasowników epistemicznych*, Uniwersytet Warszawski. Katedra Lingwistyki formalnej, Warszawa.

Fitch, F. (1963) *A Logical Analysis of Some Value Concepts*, *"Journal of Symbolic Logic"* 28, s. 135-142.

Kvanvig, J., (1995) *The Knowability Paradox and the Prospects for Anti-Realism*, "Nous" 29, s. 481-499.

MacIntosh, J. J. (1984) *Fitch's Features*, *"Analysis"* 44, s. 153-158.

Quine, W. V. O. (1983) *Granice wiedzy*, w: tenże, *Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, Wydawnictwo PWN.

Rescher, N. (2002) *Epistemic Logic*, [w:] *Companion to Philosophical Logic*. Dale Jacquette (ed.). Oxford: Blackwell Publishing, 478-490; (2006) *Epistemic Logic. A Survey of the Logic of Knowledge*, University of Pittsburg Press, Pittsburg.

Tokarz, M. (1993) *Elementy pragmatyki logicznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Woleński J. (2001) *Epistemologia. Tom II: Wiedza i poznanie*, Wydawnictwo Aureus, Kraków.

Contents

The purpose of this paper is to present the Fitch's paradox. The reasoning similar to the Fitch's argument is applied to a concept of belief and thus some observations on the knowledge, beliefs and their boundaries are drawn. Interactions among completeness of knowledge, and of beliefs, omniscience and Fitch's theorem are examined. A few erroneous application of Fitch's argumentation or unsupported conclusion drawn from it are shown.