EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 40 2005

MIECZYSŁAW OMYŁA
Uniwersytet Warszawski

AKSJOMAT FREGEGO A EKSTENSJONALNOŚĆ

Rozszerzona wersja materiału prezentowanego na forum Polskiego Zjazdu Filozoficznego w Szczecinie, 2004 r.

Celem artykułu jest wykazanie, że u podstaw zwykle przyjmowanego pojęcia kontekstu ekstensjonalnego, według którego – kontekst zdaniowy jest ekstensjonalny, gdy jego wartość logiczna nie zmienia się w wyniku zastąpienia jakiegoś zdania składowego dowolnym innym zdaniem o tej samej wartości logicznej – znajduje się zasada semantyczna nazwana przez Romana Suszkę aksjomatem Fregego. W dalszej części pracy pokazuje się, w jakim sensie ekstensjonalna jest logika niefregowska.

1. Wprowadzenie. Quine w artykule *Przedmioty mentalne* zamieszczonym w książce *Od bodźca do nauki* pisze między innymi:„Dany kontekst jest ekstensjonalny, jeśli jego wartość logiczna nie może ulec zmianie w wyniku zastąpienia jakiegoś zdania składowego innym zdaniem o tej samej wartości logicznej, ani w wyniku zastąpienia jakiegoś predykatu składowego innym predykatem o tych samych denotatach, ani w wyniku zastąpienia jakiegoś występującego w nim terminu jednostkowego innym terminem o tym samym desygnacie. Te trzy warunki nazywa się zwięźle warunkami wymienialności *salva veritate* tego co kowalentne, koekstensywne lub identyczne. Kontekst jest intensjonalny, jeśli nie jest ekstensjonalny".

Przytoczyłem tu obszerny cytat z pism Quina, gdyż w nim sposób jasny przedstawione jest, jak zwykle rozumie się termin „kontekst ekstensjonalny".

Zgadzam się z określeniem Quina ekstensjonalności dla nazw i predykatów, natomiast nie zgadzam się z jego określeniem ekstensjonalności dla zdań, a dokładniej dla kontekstów zawierających argumenty zdaniowe. Aby to uzasadnić, sprecyzujemy pojęcie języka ekstensjonalnego. Dla jego określenia wprowadzimy następujące notacje i oznaczenia:
Dla dowolnego zdania α oznaczmy przez $v(\alpha)$ wartość logiczną zdania α. Niech φ, ϕ będą dowolnymi wyrażeniami językowymi posiadającymi odniesienie przedmiotowe, tzn. wyrażenia φ, ϕ nie mają charakteru wyłącznie syntaktycznego jak nawiasy, przecinki, kropki, tylko pełnią pewne funkcje semantyczne.

Oznaczmy przez $k(\varphi)$ korelat semantyczny[1] wyrażenia φ. Korelat semantyczny wyrażenia φ jest to ten element sfery obiektywnej, który jest dany za

[1] Termin korelat semantyczny pochodzi z pracy B. Wolniewicza: *Sytuacje jako korelaty semantyczne zdań*. „Studia Filozoficzne" 2, s. 27-41.

pomocą wyrażenia φ. Na przykład korelatem semantycznym nazwy indywiduowej jest jej desygnat, korelatem predykatu jednoargumentowego jest pewna własność przedmiotów opisywana przez ten predykat i ogólnie korelatem semantycznym predykatu n-argumentowego jest n-argumentowa relacja. Bardziej skomplikowaną sprawą jest to, czym jest korelat semantyczny zdania: czy sąd wyrażony w zdaniu, czy też sytuacja przedstawiana przez zdanie, czy też może wartość logiczna danego zdania, wszystko zależy od tego, w jaki sposób sprecyzuje się funkcję oznaczoną tutaj przez k.

Symbolem $\alpha[\varphi / \phi]$ oznaczamy rezultat poprawnego zastąpienia w formule zdaniowej α wyrażenia φ przez wyrażenie ϕ.

Stosując przyjęte tutaj oznaczenia, język ekstensjonalny możemy określić w następujący sposób:

Język J jest ekstensjonalny, gdy dla dowolnych dwu wyrażeń φ, ϕ tego języka posiadających korelaty semantyczne, zachodzi związek

(*) jeżeli $k(\varphi) = k(\phi)$, to dla dowolnego zdania γ rozważanego języka

$$v(\gamma) = v(\gamma[\varphi / \phi]).$$

Jest to jedno z możliwych rozumień języka ekstensjonalnego stwierdzające, że język jest ekstensjonalny, gdy dwa dowolne wyrażenia tego języka posiadające ten sam korelat semantyczny są wzajemnie zastępowalne we wszelkich kontekstach zdaniowych danego języka bez zmiany ich wartości logicznych.

2. Fregowska semantyka zdań. Według Fregego, każdemu wyrażeniu języka naturalnego zbudowanemu zgodnie z regułami gramatycznymi obowiązującymi w danym języku, odpowiada pewien obiektywny, przez język wyznaczony sposób rozumienia owego wyrażenia, zwany przez Fregego sensem (*Sinn*) tego wyrażenia.

Nie każde natomiast wyrażenie poprawnie zbudowane do czegoś się odnosi. Wyrażenia: „ciąg najwolniej zbieżny”, „największa liczba naturalna”, „szklana góra” posiadają sens, natomiast do niczego się nie odnoszą. To, do czego dane wyrażenie się odnosi nazywa Frege znaczeniem (*Bedeutung*) tego wyrażenia. Dowolne wyrażenie posiadające znaczenie – według terminologii Fregego – wyraża swój sens i oznacza swoje znaczenie.

Nazwy według Fregego mają ustalone znaczenie dopiero w kontekście zdaniowym. Zdania są bowiem dla niego najbardziej podstawową kategorią semantyczną, przy czym przez zdanie rozumie on wypowiedź prawdziwą lub fałszywą. Zakładał więc Frege następującą zasadę:

Zasada dwuwartościowości logicznej:

(Z2 L) Zdanie w sensie logicznym jest wypowiedzią prawdziwą lub fałszywą i tylko takie wypowiedzi są zdaniami w sensie logicznym.

Analizując zdania oznajmujące, pyta Frege, czy zdanie posiada tylko sens, czy również znaczenie, oraz czy myśl zawarta w zdaniu jest jego sensem, czy też znaczeniem. Jeżeliby myśl zawarta w zdaniu była jego znaczeniem, to skoro nazwy:

„2 + 3" oraz „5"

są symbolami tej samej liczby, to zgodnie z przytoczoną zasadą ekstensjonalności Fregego – zdania:

„2+3 =5" oraz „5 = 5"

oznaczałyby tę samą myśl, co jest niezgodne z intuicją, jaką mamy na temat myśli wyrażonej w zdaniu.

Frege zwraca uwagę, że wszędzie tam, gdzie zdanie traktujemy jako opis rzeczywistości, nie zadawalamy się zrozumieniem myśli wyrażonej w tym zdaniu, lecz pytamy jeszcze, czy w rzeczywistości jest tak, jak zdanie owo głosi. Wskazuje to, według Fregego, na to, że nie zadawala nas sens zdania, czyli myśl wyrażona w tym zdaniu, lecz pytamy jeszcze o odpowiednik tej myśli w rzeczywistości. Ten pogląd semantyczny Fregego precyzujemy w postaci następującej zasady

Zasada korelacji dla zdań:

(ZK) Każdemu zdaniu w sensie logicznym α odpowiada pewien korelat semantyczny $k(\alpha)$.

Według Fregego – przyporządkowując wyrażeniom ich znaczenie stosować się powinniśmy do następującej zasady, zwanej przez nas tutaj zasadą ekstensjonalności Fregego:

Zasada ekstensjonalności Fregego:

(ZEF) Jeżeli w wyrażeniu posiadającym znaczenie zastąpimy pewne wyrażenia składowe wyrażeniami o innym sensie, ale o tym samym znaczeniu, to znaczenie tego wyrażenia nie ulegnie przez to zmianie.

Stosując przyjęte tutaj oznaczenia zasadę tę możemy zapisać:

Dla dowolnych wyrażeń φ, ϕ, jeżeli $k(\phi) = k(\varphi)$, to dla dowolnego kontekstu χ,

$$k(\chi) = k\,(\chi[\phi/\varphi])$$

Pytanie o odpowiednik zdania w rzeczywistości jest według Fregego równoważne z pytaniem o jego wartość logiczną. Frege stał na stanowisku, że zgodnie z przedstawionymi przez nas tutaj założeniami semantycznymi: (Z2L), (ZKF), (ZEF) istnieją tylko dwa znaczenia dla zdań i są nimi wartości logiczne: Prawda i Fałsz. Założenie to nazwane zostało przez Romana Suszkę aksjomatem Fregego, a dokładniej semantyczną wersją aksjomatu Fregego.

Aksjomat Fregego dla danego języka ***J*** w wersji semantycznej możemy więc sformułować:

(**AF**) Dla dowolnego zdania α rozważanego języka ***J*** zachodzi: $k(\alpha) = v(\alpha)$, czyli, że $k(\alpha) = 1$ lub $k(\alpha) = 0$,
gdzie 1 jest symbolem prawdy, a 0 jest symbolem fałszu.

Zdania w sensie logicznym są więc w ujęciu Fregego nazwami szczególnego rodzaju przedmiotów, zwanych przez niego przedmiotami logicznymi. Frege formułuje to następująco: „Każde zdanie oznajmujące, w którym istotną rolę gra znaczenie wyrazów, traktujemy więc jako nazwę, której znaczeniem – jeżeli takie istnieje – jest Prawda lub Fałsz. Te dwa przedmioty uznaje milcząco każdy, kto żywi jakieś przekonania i uznaje coś za prawdę, a więc i sceptyk. (...) Jeżeli domniemanie nasze, iż znaczeniem zdania jest jego wartość logiczna, jest słuszne, to wartość ta nie może się zmienić, gdy jakiś składnik zdania zastąpi się wyrażeniem o innym sensie, ale o tym samym znaczeniu. (...) Cóż bowiem poza wartością logiczną może nie zmienić się przy takiej zamianie w każdym zdaniu, w którym gra w ogóle jakąś rolę znaczenie składników ?

Jeżeli znaczeniem zdania jest jego wartość logiczna, to wszystkie zdania prawdziwe mają to samo znaczenie, a wszystkie fałszywe też".

Aksjomat Fregego funkcjonuje we współczesnej logice na różne sposoby, a w szczególności przejawia się w następujących faktach:

(1) Jakkolwiek za zmienne zdaniowe w klasycznym rachunku logicznym podstawiać możemy dowolne zdania, to zmienne te przyjmują swoje wartości w dwuelementowej algebrze Boole'a wartości logicznych.

(2) W każdym modelu dla języka, w którym obowiązuje klasyczny rachunek predykatów jedynymi wartościami semantycznymi zdań są ich wartości logiczne: prawda i fałsz.

(3) W językach formalnych, w których formalizujemy wiedzę o świecie pozajęzykowym, występują na ogół zmienne o charakterze nazwowym (nie zdaniowym), które przyjmują swoje wartości w różnorodnych zbiorach przedmiotów.

Aksjomat Fregego jest bardzo silnym założeniem semantycznym stwierdzającym, że uniwersum korelatów semantycznych zdań jest dwuelementowe.

Roman Suszko uważał, że logika nie powinna nakładać żadnych ograniczeń ilościowych na uniwersum korelatów semantycznych zdań poza tym, że uniwersum to jest co najmniej dwuelementowe.

Dla pełniejszego obrazu semantyki zdań Fregego, przedstawimy jeszcze dwie zasady semantyczne *implicite* zawarte w jego poglądach, które są istotnie słabsze od aksjomatu Fregego, tzn. wynikają one z aksjomatu Fregego, ale go nie nie pociągają.

Zasada podporządkowania podziałowi fundamentalnemu:

(ZP) Jeżeli dwa dowolne zdania α, β mają ten sam korelat semantyczny, to mają one również tę samą wartość logiczną, co zapisujemy:

$$\text{jeżeli } k(\alpha) = k(\beta)\text{, to } v(\alpha) = v(\beta)$$

Podział wszystkich zdań danego języka na prawdziwe i fałszywe Suszko w pracy [4] nazywał podziałem fundamentalnym i stąd nazwa tej zasady. Zgodnie z tą zasadą jeżeli dwa dowolne zdania mają różne wartości logiczne, to mają również różne korelaty semantyczne. Wynika stąd między innymi to, że korelatem semantycznym zdania nie jest to, co dane zdanie przedstawia, tylko to, co dane zdanie stwierdza, gdyż jeżeli mamy parę zdań sprzecznych, to na ogół uważa się, że oba zdania z danej pary to samo przedstawiają, a co innego stwierdzają.

Zasada zróżnicowania kontekstowego:

(ZZK) Dla dowolnych zdań α, β, oraz dla dowolnego kontekstu zdaniowego γ, jeżeli $v(\gamma) = v\ (\gamma[\alpha/\beta]$, to $k(\alpha) = k(\beta)$.

Bardziej formalnie możemy zasadę (ZZK) zapisać schematycznie:

(4) $$\forall\alpha\forall\beta\ \{\ \forall\gamma\ (v(\gamma) = v\ (\gamma[\alpha/\beta])\ ) \rightarrow k(\alpha) = k(\beta)\}$$

Słownie możemy tę zasadę wypowiedzieć w następujący sposób: jeżeli dwa zdania są wzajemnie wymienialne we wszystkich kontekstach danego języka bez zmiany wartości logicznych tych kontekstów, to zdania te mają ten sam korelat semantyczny. Zasadę (ZZK) można by również nazwać chyba zasadą Leibniza, gdyż Frege w [2] cytuje Leibniza słowa: *„Eadem sunt, quae sibi mutuo substituti possunt, salva veritate"* (identyczne są te i tylko te, z których jedno można zastąpić drugim bez zmiany prawdziwości). Stosując transpozycję do wzoru (4) w sposób równoważny zasadę zróżnicowania kontekstowego możemy wypowiedzieć:

jeżeli dwa zdania mają różne korelaty, to istnieje w rozważanym języku taki kontekst zdaniowy γ, który różnicuje te zdania pod względem wartości logicznej, tzn. że zdania: γ oraz $\gamma[\alpha/\beta]$ różnią się wartością logiczną.

Podsumowując, semantyka fregowska dla zdań opiera się na zasadach: (Z2L), (ZK), (ZEF), (ZP), (ZZK). Aby wypowiedzieć bardziej współcześnie i syntetycznie te zasady, przyjmijmy dodatkowo oznaczenia, niech Z będzie zbiorem zdań ustalonego języka *J*, oraz niech *R* oznacza rzeczywistość, do której dany język się odnosi. Zgodnie z zasadą (Z2L) istnieje funkcja:

(5) $$v\colon Z \rightarrow \{0, 1\},$$

Funkcję v nazywamy waluacją logiczną.

Z kolei z zasady korelacji (ZK) wynika, że istnieje funkcja:

$$k\colon Z \rightarrow R,$$

Z zasady ZEF wynika, że jeżeli \$, # są dowolnymi funktorami odpowiednio jedno i dwuargumentowymi języka *J*, to dla dowolnych zdań α, β ze zbioru Z zachodzą związki:

(6) $$k(\$\alpha) = \$'(k\alpha),$$

(7) $$k(\alpha \# \beta) = k(\alpha)\ \#'\ k(\beta)\ ,$$

gdzie : $\$'$, $\#'$ są operacjami na korelatach semantycznych zdań operacjami odpowiadającymi kolejno funktorom $\$$, $\#$.

Związki te wskazują na to, że funkcje przyporządkowujące zdaniom ich korelaty semantyczne są homomorfizmami algebry zdań języka na algebrę ich korelatów semantycznych.

Pozostaje problem dokładniejszego dookreślenia, jakiego rodzaju funkcjami są funkcje: v oraz k. Wzajemny związek między funkcjami v oraz k ustala następujący schemat:

$$k(\alpha) = k(\beta) \leftrightarrow \forall\gamma(\, v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta])\,)$$

W schemacie tym stwierdza się, że dwa dowolne zdania pewnego języka mają ten sam korelat semantyczny wtedy i tylko wtedy, gdy są wzajemnie wymienialne we wszystkich kontekstach bez zmiany wartości logicznych tych kontekstów.

3. Silna zasada ekstensjonalności. Zasada ekstensjonalności (ZEF) ograniczona tylko do zdań stwierdza, że dla dowolnych dwu zdań: α, β, jeżeli $k(\alpha) = k(\beta)$, to dla dowolnego kontekstu zdaniowego γ, $k(\gamma) = k(\gamma[\alpha/\beta])$.

Zgodnie z aksjomatem Fregego (AF) dla dowolnego zdania α, zachodzi

$$k(\alpha) = v(\beta).$$

Jeżeli założymy aksjomat Fregego , to zasada ekstensjonalności Fregego (ZEF) ograniczona do zdań przyjmuje wtedy kształt:

(8) jeżeli $v(\alpha) = v(\beta)$, to dla dowolnego kontekstu zdaniowego γ, $(v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta])\,)$.

Schemat (8) nazywać będziemy silną zasadą ekstensjonalności. Silną zasadę ekstensjonalności dla zdań w sposób wyraźny wypowiadamy w następujący sposób:

Silna zasada ekstensjonalności dla formuł zdaniowych.

(ZE^+) Jeżeli dwie dowolne formuły zdaniowe (zdania) mają tę samą wartość logiczną, to są wzajemnie wymienialne we wszystkich kontekstach zdaniowych bez zmiany wartości logicznych tych kontekstów.

Zasada (ZE^+) jest w literaturze nazywana wymienialnością *salva veritate.* Zasada ta obowiązuje w logice klasycznej. W języku logiki klasycznej formuły o tych samych wartościach logicznych są wzajemnie wymienialne we wszystkich kontekstach zdaniowych bez zmiany ich wartości logicznej. Schemat (4) dowodzi, że gdy założymy zarówno zasadę ekstensjonalności Fregego (ZEF) oraz aksjomat Fregego (AF), to otrzymamy silną zasadę ekstensjonalności (ZE^+).

Pokażemy teraz, że z zasad (ZE^+) oraz (ZZK) razem wziętych wynika aksjomat Fregego.

Dla dowodu załóżmy, że $v(\alpha) = v(\beta)$, wtedy na podstawie (ZE^+) otrzymujemy:

(9) $$\forall\gamma(\, v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta]) .$$

Z (9) na podstawie zasady zróżnicowania kontekstowego otrzymujemy, że
$k(\alpha) = k(\beta)$. Rozważaliśmy dotąd trzy różne zasady ekstensjonalności dla zdań: (ZEF), (ZE) oraz (ZE^+), a mianowicie:

(ZEF) $k(\alpha) = k(\beta) \rightarrow \forall\gamma\,(k(\gamma) = k(\gamma[\alpha/\beta])$

(ZE) $k(\alpha) = k(\beta) \rightarrow \forall\gamma\,(v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta]))$

(ZE^+) $v(\alpha) = v(\beta) \rightarrow \forall\gamma\,(v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta])$

Zasada (ZEF) jest zasadą ekstensjonalności Fregego zastosowaną do zdań. Dotyczy ona wyłącznie zdań i ich korelatów, nie mówi się w niej niczego na przykład o wartościach logicznych zdań. Sformułowanie tej zasady *implicite* zawiera założenie, że każde zdanie ma jeden korelat semantyczny. Ale można by tego uniknąć przyjmując jedynie, że pewne zdania mają korelaty i że pewne zdania mają więcej niż jeden korelat, ale nie byłoby to zgodne z poglądami Fregego, który kładł nacisk na jednoznaczność wyrażeń. Z zasady (ZEF), a przy założeniu zasady podporządkowania podziałowi fundamentalnemu (ZP), wynika zasada (ZE). Z zasady (ZE) wynika pozornie silniejsza od niej zasada (ZEF). Jest tak pod warunkiem, że przyjmujemy zasadę zróżnicowania kontekstowego (ZZK).

Załóżmy bowiem zasadę (ZE) oraz dodatkowo załóżmy, że $k(\alpha) = k(\beta)$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że

(10) $\exists\,\gamma\,((k(\gamma) \neq k(\gamma[\alpha/\beta])$.

Oznaczmy teraz formułę γ spełniającą warunek (10) przez δ. Zachodzi wtedy $(k(\delta) \neq k(\delta[\alpha/\beta])$. Na podstawie zasady zróżnicowania semantycznego zachodzi $k(\alpha) \neq k(\beta)$, co jest sprzeczne z przyjętym przez nas założeniem.

Z zasady (ZE^+) na podstawie zasady podporządkowania podziałowi fundamentalnemu wynika zasada (ZE). Jeżeli przyjmiemy znak $\models$ jako symbol relacji wynikania logicznego, to przedstawione tutaj związki możemy zapisać:

(11) ZEF, ZP $\models$ ZE

(12) ZE , ZZK $\models$ ZEF

(13) ZEF, AF $\models$ ZE^+

(14) ZE^+ , ZZK $\models$ AF

(15) ZE^+ , ZP $\models$ ZE

W literaturze logicznej zasady: (Z2L) , (ZK), (ZEF), (ZP) , (ZZK) noszą nazwę zasad niefregowskiej semantyki dla zdań, gdyż nie pociągają one aksjomatu Fregego (AF).

Niefregowska semantyka dla zdań stanowi pewne uogólnienie fregowskiej semantyki, gdyż zawiera istotne założenia fregowskiej semantyki zdań, z wyłączeniem założenia, że wszystkie zdania prawdziwe mają ten sam korelat semantyczny i, że wszystkie zdania fałszywe mają również jeden wspólny korelat semantyczny. Związki (11) - (15) sprowadzają się do trzech następujących wniosków:

Wniosek 1.

Na gruncie zasad niefregowskiej semantyki dla zdań : zasada ekstensjonalności (ZE^{+}) jest równoważna aksjomatowi Fregego (AF).

Wniosek 2.

Zasada ekstensjonalności Fregego dla zdań (ZEF) jest na gruncie pozostałych zasad niefregowskiej semantyki zdań równoważna z pozornie słabszą zasadą ekstensjonalności (ZE).

Wniosek 3.

Z zasad niefregowskiej semantyki zdań nie wynika ani aksjomat Fregego, (AF) ani silna zasada ekstensjonalności (ZE^{+}).

4. Logiczna wersja zasad niefregowskiej semantyki zdań. Frege był twórcą nowoczesnego rachunku logicznego, w szczególności zaksjomatyzował on klasyczny rachunek zdań, od niego też pochodzi pojęcie wartości logicznej zdania. Rodzi się pytanie, jak w klasycznym rachunku zdań ujawniają się poglądy semantyczne Fregego ujęte tutaj w zasady semantyczne oraz w tzw. aksjomat Fregego.

Zgodnie ze słynnym aforyzmem Quine'a, „istnieć, to być wartością zmiennej" zasada korelacji dla zdań (ZK) ma swój odpowiednik w języku klasycznego rachunku zdań w tym, że w języku tym występują zmienne zdaniowe: $p, q, r, \ldots\ldots\ldots$ interpretowane obiektywistycznie, a nie podstawieniowo, tzn. za zmienne te możemy podstawiać konkretne zdania, ale to nie te zdania są ich wartościami, ale stwierdzane przez nie sądy czy też opisywane przez nie sytuacje bądź odpowiadające im wartości logiczne.

Z kolei zasada dwuwartościowości logicznej ujawnia się w ten sposób, że twierdzeniami klasycznego rachunku zdań są następujące formuły:

$$(p \wedge \neg), \quad \neg(p \wedge \neg p).$$

Pierwsza z tych formuł stwierdza, że dla dowolnego sądu p , zachodzi przynajmniej jedno: p lub $\neg$ p, a druga formuła stwierdza, że co najwyżej jeden z tych sądów zachodzi. Obie łącznie stwierdzają, że istnieją co najmniej dwa korelaty semantyczne dla zdań.

Aby wyjaśnić, w jaki sposób pozostałe zasady semantyczne funkcjonują w rachunkach zdaniowych przypomnijmy, że Frege w pracy [1] pisał między innymi: „Takim samym prawem jakim piszemy

$$'2^4 = 4 \bullet 4',$$

możemy również pisać

$$'(2^4 = 4^2) = (4 \bullet 4 = 4^2)',$$

$$'(2^2 = 4) = (2 > 1)'."$$

Z cytatu tego wynika, że Frege, z jednej strony, posługiwał się spójnikiem identyczności tak samo, jak predykatem identyczności. Oba funktory oznaczał tym samym znakiem „=" .

Z drugiej strony, spójnik identyczności utożsamiał ze spójnikiem równoważności. Fakt arytmetyczny, który my dzisiaj zapisujemy $(2^2 = 4) \leftrightarrow (2 > 1)$, Frege zapisywał jako równość $(2^2 = 4) = (2 > 1)$.

Aksjomatem Fregego Suszko nazwał formułę utożsamiającą spójnik identyczności ze spójnikiem równoważności. Aby odrzucić aksjomat Fregego, Suszko wprowadził do języka klasycznej logiki spójnik identyczności „≡" różny od klasycznego spójnika równoważności: „↔„ . To, że litery: *p, q* odnoszą się do tego samego sądu (czy też sytuacji), zapisujemy formalnie: $p \equiv q$, a z kolei to, że dwa sądy są materialnie równoważne, czyli że oba mają tę samą wartość logiczną, zapisujemy : $p \leftrightarrow q$.

Rachunek logiczny powstały z klasycznej logiki przez dodanie do języka tej logiki nieprawdziwościowego spójnika identyczności nazwał Suszko logiką niefregowską. Nie omawiamy tutaj tej logiki, w całej rozciągłości wskażemy tylko tkwiące w niej wcześniej przedstawione zasady semantyczne.

W szczególności aksjomatami tej logiki są wszystkie formuły reprezentowane przez następujące schematy:

$$(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\neg \alpha \equiv \neg \beta)$$

$$(\alpha \equiv \beta) \wedge (\gamma \equiv \delta) \rightarrow [(\alpha \# \gamma) \equiv (\beta \# \delta)]$$

gdzie # jest dowolnym spójnikiem rozważanego języka.

$$\forall v\, (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (Qv\alpha \equiv Qv\beta)\,,$$

gdzie v jest dowolną zmienną wolną, a Q jest dowolnym kwantyfikatorem rozważanego języka. Schematy te gwarantują, że wyrażenia o tych samych korelatach semantycznych są wzajemnie zastępowalne we wszelkich kontekstach, czyli, że zachodzi zasada (ZEF).

Z kolei zasada podporządkowania podziałowi fundamentalnemu (ZP) wyraża się w języku logiki niefregowskiej w ten sposób, że aksjomatami tej logiki są wszystkie formuły reprezentowane przez schemat:

(16) $$(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

co możemy jeszcze inaczej zapisać, że twierdzeniami tej logiki są wszystkie podstawienia formuły:

(17) $$(p \equiv q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Formuła (17) jest to w języku logiki niefregowskiej wyrażona semantyczna zasada podporządkowania (ZP). Suszko formułę (17) nazywał specjalnym aksjomatem dla spójnika identyczności.

Zasada zróżnicowania kontekstowego (ZZK) dla języków ze spójnikiem identyczności i z negacją prawdziwa jest chociażby dlatego, że jeżeli na przykład $k(p) \neq k(q)$, to poszukiwanym kontekstem różnicującym jest formuła

$\gamma =: \neg(p \equiv q)$, wtedy $1 = v(\gamma) \neq v(\gamma[p/q]) = v(\neg(q \equiv q)) = 0$.

5. Logiczna wersja aksjomatu Fregego. W poprzednim paragrafie pokazaliśmy, że poszczególne zasady niefregowskiej semantyki zdań mają swoje odpowiedniki logiczne w języka niefregowskiej logiki: w jego składni, bądź w aksjomatach lub twierdzeniach logicznych. Podobnie aksjomat Frgego może być wyrażony w języku niefregowskiej logiki. Aksjomatem Fregego Suszko nazwał formułę utożsamiającą spójnik identyczności ze spójnikiem równoważności. Suszko pokazał, że aksjomat Fregego ma wiele równoważnych sformułowań.

Pozornie najsłabszą wersją aksjomatu Fregego jest formuła:

(AF) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \equiv q)$

Jeżeli do aksjomatów logiki niefregowskiej dodamy (AF), to jako twierdzenia otrzymamy formuły:

(18) $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \equiv q)$

(19) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \equiv q)$

(20) $(p \equiv q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

(21) $(p \equiv q) \equiv (p \leftrightarrow q)$

Formuły te wskazują, że na gruncie logiki fregowskiej, tzn. logiki niefregowskiej, w której twierdzeniem jest aksjomat Fregego (AF), oba spójniki są całkowicie nieodróżnialne. Ponadto na gruncie logiki niefregowskiej aksjomat Fregego jest równoważny dowolnej z formuł:

(22) $(p \equiv q) \vee (q \equiv r) \vee (p \equiv r)$

(23) $\neg(p \equiv q) \equiv (p \equiv \neg q)$

(24) $\forall p \forall q\, [(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\alpha(p) \leftrightarrow \alpha(q))]$

(25) $(p \equiv 1) \vee (p \equiv 0)$,

gdzie: $1 = \forall p\, (p \vee \neg p)$, $0 = \exists p\, (p \wedge \neg p)$.

Formuły te na różne sposoby stwierdzają, że uniwersum zmiennych zdaniowych jest zbiorem dwuelementowym.

Formuła (22) *explicite* stwierdza, że uniwersum zmiennych zdaniowych jest co najwyżej dwuelementowe, i wraz z tautologią niefregowskiej logiki:

(26) $\neg(p \equiv \neg p)$

łącznie stwierdza, że uniwersum zmiennych zdaniowych jest dokładnie dwuelementowe. Formuła (24) jest w języku z kwantyfikatorami wiążącymi zmienne zdaniowe odpowiednikiem metajęzykowej zasady:

(ZE^+) $v(\alpha) = v(\beta) \rightarrow \forall \gamma\, (v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta])$

Formuła (25) wskazuje, że na gruncie niefregowskiej logiki można zdefiniować stałe zdaniowe, (czyli formuły zdaniowe bez zmiennych wolnych) oraz, że zmienne zdaniowe przyjmują tylko dwie wartości: 0 i 1.

Formuły (AF), (18), (19),........(25) są na gruncie logiki niefregowskiej równoważne i każda z nich może być nazwana logiczną albo też ontologiczną wersją aksjomatu Fregego.

7. Ekstensjonalność logiki niefregowskiej. Niech Γ będzie dowolną formułą zdaniową języka logiki niefregowskiej. Niefregowska logika jest ekstensjonalna w tym sensie, że schemat

(**) $(\varphi \equiv \phi) \to (\Gamma(\varphi) \equiv \Gamma(\phi))$

jest schematem twierdzeń logicznych. Ponadto następujące reguły:

(27) $(\varphi \equiv \phi) \vdash (\Gamma(\varphi) \equiv \Gamma(\phi))$

(28) $(\varphi \equiv \phi), \Gamma(\varphi) \vdash \Gamma(\phi))$

(gdzie znak „ |-" jest symbolem wynikania inferencyjnego) są regułami logiki niefregowskiej.

Z kolei następujące reguły obowiązujące w logice klasycznej:

(29) $\alpha \leftrightarrow \beta \vdash \Gamma(\alpha) \leftrightarrow \Gamma(\beta)$

(30) $\alpha \leftrightarrow \beta, \Gamma(\alpha) \vdash \Gamma(\beta)$

nie są regułami logicznymi logiki niefregowskiej. Logika niefregowska jest więc osłabieniem, czyli uogólnieniem logiki klasycznej, gdyż pewne reguły obowiązujące w logice klasycznej nie obowiązują w logice niefregowskiej.

Widać to wyraźnie, gdy rozpatrujemy dwa rozszerzenia implikacyjno-negacyjnego języka logiki klasycznej o znak „≡" raz scharakteryzowany jako spójnik identyczności, a drugi raz jako spójnik klasycznej równoważności. Oznaczmy przez $KRZ_{\equiv}$ zbiór twierdzeń logicznych pierwszego z tych rozszerzeń, czyli $KRZ_{\equiv}$ jest zbiorem twierdzeń logicznych logiki niefregowskiej w języku logiki zdaniowej, której jedynymi spójnikami są: klasyczna negacja $\neg$, klasyczna implikacja $\to$ oraz spójnik identyczności $\equiv$.

Z kolei oznaczmy przez $KRZ_{\equiv}^{+}$ zbiór twierdzeń logicznych drugiego z tych rozszerzeń, czyli $KRZ_{\equiv}^{+}$ jest zbiorem twierdzeń klasycznego implikacyjno-negacyjno- równoważnościowego rachunku. W formułach ze zbioru $KRZ_{\equiv}^{+}$ znak „≡ " jest rozumiany jako spójnik klasycznej równoważności. Zachodzi wtedy związek

$KRZ_{\equiv} \subset KRZ_{\equiv}^{+}$ oraz $KRZ_{\equiv} \neq KRZ_{\equiv}^{+}$, gdyż na przykład formuły:

(31) $(p \to q) \to [(q \to p) \to (p \equiv q)]$

(32) $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$

są twierdzeniami $KRZ_{\equiv}^{+}$, a nie są twierdzeniami logicznymi $KRZ_{\equiv}$. Innymi słowy zbiór $KRZ_{\equiv}$ (twierdzeń implikacyjno-negacyjno-identycznościowego rachunku zdaniowego) jest właściwym podzbioem $KRZ_{\equiv}^{+}$ (zbioru twierdzeń implikacyjno-negacyjno- równoważnościowego rachunku zdaniowego). Twierdzeniami niefregowskiej logiki zdaniowej są następujące osłabienia formuł (31), (32):

$$(p \to q) \to (q \to p) \to (\leftrightarrow q)$$

$$(p \equiv q) \leftrightarrow (q \equiv p)$$

Logika niefregowska jest ekstensjonalna w tym sensie, że dla dowolnej dopuszczalnej logicznie interpretacji, korelat semantyczny dowolnego wyrażenia złożonego należącego do języka tej logiki jest funkcją korelatów semantycznych jego wyrażeń składowych, co możemy jeszcze inaczej wypowiedzieć, że wyrażenia o tych samych korelatach semantycznych są wzajemnie zastępowalne we wszelkich wyrażeniach zdaniowych danego języka, bez zmiany ich wartości logicznych. Natomiast formuły zdaniowe o tych samych wartościach logicznych nie są wzajemnie zastępowalne bez zmiany wartości logicznych w kontekstach zawierających spójnik identyczności.

Summary

The aim of this article is the proof that commonly used principle of extensionaly (according to which the logical value of a complex sentence depends only on the logical values of sentences that are the parts of it) implies the Fregeas axiom. Moreover it has been presented in what sense the non-fregean logic is extensional.

Literatura:

[1] Frege G.: *Funkcja i pojęcie,* w: *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz). Warszawa 1970, s. 18-44.

[2] Frege G.: *Sens i znaczenie*, w: *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz). Warszawa 1970, s. 60-88.

[3] Omyła M.: *Zasady niefregowskiej semantyki zdań a zasady semantyczne Fregego i Wittgensteina*, w: *Szkice z semantyki i ontologii sytuacji,* red. M. Omyły. Warszawa 1991.

[4] Suszko R.: *Formalna teoria wartości logicznych I.* „Studia Logica" 6, (1957), s. 144- 236.

[5] Suszko R.: *The Fregean Axiom and Polish Mathematical Logic 1920^s*, „Studia Logica" 35/3 (1977) s. 377-380.

[6] Suszko R.: *Odrzucenie aksjomatu Fregego i reifikacja sytuacji*, tłum. J. Pogonowskiego, red. A. Biłat. Lublin 2000.

[7] Quine W.V.: *Przedmioty mentalne*, w: *Od bodźca do nauki.* Warszawa 1998.

[8] Wolniewicz B.: *Sytuacje jako korelaty semantyczne zdań.* „Studia Filozoficzne" 2, s. 27-41.