EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 25 1998

ROBERT B. USEK

WPROWADZENIE DO LOGIKI MODALNEJ

G. E. Hughes, M. J. Cresswe//. - *A new introduction to modal logic.* Routledge, London-New York 1996, X + 421 s.

Praca dwóch brytyjskich autorów jest wprowadzeniem do logiki modalnej. Jest to książka samowystarczalna, przydatna nawet dla kogoś, kto nigdy nie studiował logiki. Książka została podzielona na trzy części: pierwsza dotyczy modalnych logik zdaniowych; druga - normalnych systemów modalnych; ostatnia natomiast próbuje ująć modalny rachunek predykatów. Mechanizmem wiążącym wszystkie jest semantyka światów możliwych. Rozważania niemal w całości dotyczą technicznego ujęcia systemów K, T, B, S4, S5 i pokrewnych. Książka ta zamierzona jest jako zastępstwo dla wcześniejszych prac G. E. Hughesa i M. J. Cresswella: *An introduction to modal logie,* 1968 (w skrócie IML) i *A companion to modal logie,* 1984 **(CML).**

Część I zatytuowana *Podstawowe modalne logiki zdaniowe* obejmuje większość zagadnień zawartych w IML. Dotyczy powiązań między systemami logik modalnych określonymi jako zbiory formuł zdefiniowanych aksjomatycznie i klasą struktur zwanych modelami. Najmniejszą normalną logiką modalną zdań jest system K. Logiki T, S4, B otrzymujemy jako aksjomatyczne rozszerzenia K. Dla normalnej logiki modalnej zdań rama (frame) to para [W, R], gdzie W jest niepustym zbiorem światów możliwych, R jest binarną relacją określoną na W. *Model* definiujemy jako trójkę [W, R, V], gdzie [W, R] jest ramą, a V jest funkcją przyporządkowującą każdej zmiennej zdaniowej podzbiór W. Mówimy, że formuła jest ważna (valid) w modelu, gdy jest prawdziwa w każdym świecie. Dowodzi się następnie, że system scharakteryzowany jest przez daną klasę modeli, w tym sensie, że formuła jest twierdzeniem tego systemu wtedy i tylko wtedy, gdy jest ważna w każdym modelu tej klasy. Dowód ten ma dwa etapy: w pierwszym wykazuje się, że system jest zgodny (soundness) z daną klasą modeli, tzn. każde twierdzenie systemu jest ważne w każdym modelu tej klasy; w drugim, że jest zupełny *(completness),* tzn. każda formuła ważna w każdym modelu tej klasy jest twierdzeniem systemu.

Najistotniejszymi zmianami w NIML w stosunku do IML są: po pierwsze, tak jak w CML autorzy biorą system K zamiast T jako podstawowy; po drugie, tak jak w CML (rozdz. 6) wykorzystują metodę modeli kanonicznych do dowodzenia zupełności rozważanych systemów (metoda Henkina zaadaptowana do logik modalnych). Zachowana została (rozdz. 5) metoda koniunkcyjnych postaci normalnych do udowodnienia zupełności S5. Natomiast metoda diagramów semantycznych dla sprawdzania ważności formuł zawarta została w rozdz. 4, ale pominięte zostały, oparte na niej, dowody zupełności.

Część II zatytułowana *Normalne systemy modalne* obejmuje szereg zagadnień modalnej logiki zdaniowej. Mimo że ta część książki może być postrzegana jako bardziej interesująca dla specjalistów, jest też łatwo dostępna dla czytelników, którzy prześledzili część I. Część ta dotyczy pewnych cech modeli kanonicznych. Autorzy wprowadzają najpierw trzy inne systemy S4. 3, S4. M, S4. 2 i przedstawiają dowody zupełności dla tych systemów, używając techniki modeli kanonicznych. Następnie dyskutują pewne własności ram modeli kanonicznych wybranych systemów. W końcu omawiane są pewne ograniczenia metody modeli kanonicznych. Zdefiniowany jest niekanoniczny, normalny system KW (KW = K+ L(Lp → p) → Lp)); szkoda jednak, że autorzy nie poświęcili mu więcej uwagi. System ten, nazywany najczęściej GL (Goedla-Loeba), ma bowiem bardzo ciekawe własności. Modalny spójnik konieczności w tym systemie dobrze oddaje właściwości predykatu dowodliwości Bew(x) w arytmetyce Peany (PA). Dzięki wynikom Solovaya, który udowodnił arytmetyczne twierdzenie o zupełności GL, pierwsze i drugie twierdzenie Goedla o niezupełności PA dają się przenieść do rachunku zdaniowego. Z tego powodu system ten nazywany jest niekiedy logiką dowodliwości. Systemowi temu poświęcona jest znakomita książka G. Boolosa *The unprovability of consistency* (1979).

W rozdz. 8 dyskutowane są systemy posiadające własność skończonych modeli (finite model property - f. m. p.), tzn. takie, dla których możemy udowodnić zgodność i zupełność ze względu na klasę skończonych ram (dla każdej formuły nie należącej do systemu istnieje skończony model dla tego systemu, w którym nie jest ona prawdziwa). Istnieje ścisły związek między własnością skończonych modeli a rozstrzygalnością: każdy aksjomatyzowalny system modalny posiadający f. m. p. jest rozstrzygalny. Określić jednak możemy systemy, które mają f. m. p., ale są nierozstrzygalne i odwrotnie: systemy aksjomatyzowalne i rozstrzygalne bez f. m. p. (np. T + L (LLp → LLLp) → (Lp → LLp)). Przykłady systemów niezupełnych względem semantyki relacyjnej i omówienie związków między f. m. p. a zupełnością można zna- leźć w rozdz. 9. Następnie pokazane są różnice między ramami i modelami (np. mimo że T jest scharakteryzowane przez ramy zwrotne, istnieją niezwrotne modele dla T). Inne wyniki przedstawione w rozdz. 10 dotyczą pojęcia *zwartości* (compactness) i *definiowalności* relacji R z ramy [W, R] w języku pierwszego lub drugiego rzędu klasycznego rachunku zdań. Geneza logik modalnych związana jest z powstaniem systemów ścisłej implikacji Lewisa, tzn. próbą ujęcia przez własność spójnika implikacji zasadniczych cech pojęcia wynikania lub wyprowadzalności. Opis ścisłej implikacji i nie-normalnych systemów S1 i S2 znajduje się w rozdz. 11.

W celu zwiększenia mocy ekspresywnej języka należy dopuścić użycie kwantyfikatorów, deskrypcji określonych, identyczności. Wprowadzenie do logiki modalnej kwantyfikatorów stawia nas przed koniecznością dokonania szeregu wyborów. Modalnemu rachunkowi predykatów poświęcona jest część III.

Niezależnie od liczby podejmowanych współcześnie prób określenia i wyrafinowanych technik, jakimi odznaczają się niektóre z nich, modalny rachunek predykatów (MRP) stanowi obszar nie w pełni sprecyzowany. Semantyka MRP jest szczególnie skomplikowana. W rozdz. 13 zdefiniowany zostaje język MRP i modele dla systemów MRP powstających jako rozszerzenia klasycznego rachunku predykatów przez dodanie normalnych modalnych logik zdaniowych (KRP + reguła Goedla). *Modelem w MRP* jest czwórka [W, R, D, V], w której [W, R] jest ramą, D jest dziedziną indywiduów, V(ϕ) = {(u 1,..., u $_n$, w): u ε D, w ε W} gdzie ϕ) jest predykatem. W rozdz. 13 dyskutowane są modalności de re i de dieto. W rozdziale następnym przedstawione są systemy MRP *z formułą Barcan* (V x L α → L V x α - w skrócie FB). FB jest istotną własnością, która dla pewnych wybranych systemów S, np. dla B, S5, stanowi tezę w KRP + S, ale dla innych (np. -K, T, S4) - nie. Dowiedziona zostaje zupełność (rozdz. 14) dla systemów MRP z FB przy użyciu modeli kanonicznych i pokazane są systemy niezupełne (np. oparte na K + (MLp → LMp)). Następnie (rozdz. 15), po zdefiniowaniu rozszerzonych dziedzin (expanding domains) dowiedziona zostaje zupełność dla systemów bez FB powstających przez predykatowe rozszerzenie K, D, T, S4. Podaje się też przykład systemu opartego na S4. 4 (S4 + p → (MLp → p), który jest zupełny, gdy zawiera FB, ale niezupełny w przeciwnym wypadku. Można zauważyć, że modele dla systemów zawierających FB są specjalnymi przypadkami modeli dla systemów bez FB. Definiuje się predykat istnienia i wprowadza semantykę dla systemów z tym predykatem (rozdz. 16), po czym dyskutowane są systemy MRPz identycznością, a także podana semantyka i dowód zupełności dla takich rachunków (rozdz. 17). Dwa kolejne rozdziały, w których omawia się deskrypcje określone i obiekty intensjonalne, należy szczególnie polecić czytelnikom o wykształceniu filozoficznym.

Semantyka światów możliwych używana w tej książce nie jest jedyną, która była rozwinięta dla logik modalnych. Istnieją semantyki oparte na innych ideach matematycznych, ujmujące różne intuicje i obejmujące szerszy zakres logik. Niestety, rozważania dotyczące alternatywnych semantyk ograniczone zostały do elementarnych wiadomości na końcu części II (modele algebraiczne, general frame, semantyka sąsiedztwa, struktury epistemiczne). Algebraiczna interpretacja dla logik modalnych, zainicjowana została pracami Mc Kinseya i Tarskiego (algebry Boole, a z operatorami). W pewnych przypadkach algebraiczny sposób traktowania logik modalnych ma szczególne znaczenie. Jednym jest dziedzina dynamicznej logiki zdań, gdzie algebra dynamiczna była gruntownie badana. Dobry przegląd tej problematyki stanowi praca R. Parikha *Propositional dynamic logic of programs: a survey* (1981). Drugim są badania dotyczące logiki GL. Zachodzi wiele interesujących związków GL z algebrami diagonalnymi, np. klasa algebr diagonalnych jest silnie adekwatna dla strukturanych konsekwencji związanych z GL. Zainteresowanym polecamy pracę J. Hawranka *Aspekty algebraiczne systemu modalnego Goedla-Leoba* (1994).

Wiele zastrzeżeń wzbudza sposób potraktowania przez autorów dedukcji naturalnej. Przedstawiona została w dużym skrócie dla logiki zdań i logik modalnych z większą liczbą operatorów konieczności. Użytkownik logik modalnych pragnący je stosować w dziedzinach związanych z użyciem komputerów - może nie być usatysfakcjonowany.

W notach na końcu każdego rozdziału została zawarta duża ilość szczegółów historycznych i odniesień do prac <ródłowych i przeglądowych. Należy również zaznaczyć, że praca zawiera wyczerpującą bibliografię i indeks pojęć i autorów. Bibliografia nie obejmuje wydawnictw, które ukazały się po roku 1995.

Ujęcie tematu jest zatem całkiem profesjonalne. Pomimo, że logiki uwzględnione w pracy stanowią jedynie niewielką gałą< szerokiej rodziny logik, z pewnością zostały ujęte główne idee i podstawowy zestaw narzędzi.

Aparat formalny wprowadzany jest stopniowo, poprzez przykłady i ćwiczenia; może być przyswojony przez studentów nie posiadających formalnego przygotowania matematycznego, ale z dobrym, matematycznym wyczuciem. Można więc uznać, że pewna elegancja współczesnej logiki modalnej została tu poświęcona - w imię znalezienia zrozumienia u studentów wydziałów filozoficznych.